Aux colleurs

Nous n'avons pas encore parlé de continuité.

420. Espaces vectoriels normés

Normes Définition, exemples, propriétés. Distance associée à une norme, distance d'un vecteur à une partie de E. Norme euclidienn associée à un produit scalaire. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$, sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, sur $\mathbb{K}[X]$, sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$, on utilise directement $\operatorname{Sup}\{kx,\ x \in A\} = k\operatorname{Sup}(A)$. La norme infinie.
Boules, partie convexe de E, partie bornée de E.
Espace vectoriel normé produit.

Suites d'éléments d'un evn Convergence, divergence. Unicité de la limite, lien avec la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$.
Suites bornées. Opérations sur les suites convergentes.
En dimension finie, suites coordonnées, convergence par coordonnées. Convergence des suites à valeurs dans un espace produit.

Comparaison des normes Normes équivalentes. On admet pour l'instant que les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.
Invariance du caractère borné, de la convergence.
Méthode pour comparer deux normes.

430. Topologie des evn

Point intérieur, ouvert, voisinage Voisinage d'un point (défini par les boules ouvertes), cas des normes équivalentes.
U est ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points. Une boule ouverte est un ouvert. Union quelconque, intersection finie d'ouverts. Un produit fini d'ouverts est un ouvert.
Point intérieur à A, intérieur $\mathring{A}$ de A. A est ouvert ssi $\mathring{A} = A$. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Point adhérent, fermé, densité A est fermé ssi son complémentaire A^C est ouvert. Une boule fermée est un fermé. Un union finie, une intersection quelconque de fermés est un fermé. Un produit fini de fermés est un fermé.
Point adhérent à A, adhérence $\overline{A}$ de A. A est fermé ssi $\overline{A} = A$. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Lien avec $d(x, A)$.
Frontière.
Densité.
Caractéristations séquentielles de l'adhérence, du caractère fermé, de la densité.

Topologie et normes équivalentes

Topologie induite

310. Espaces préhlibertiens réels

Produit scalaire et norme associée Produit scalaire. Exemples de références dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Autres exemples.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité, inégalité de Minkowski. Norme euclidienne. Identités remarquables.

Orthogonalité Vecteurs orthogonaux, famille orthgonale, famille orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.
Sous-espace orthogonaux. Deux espaces orthogonaux sont en somme directe, on note $\overset{\perp}{\oplus}$ la somme. Familles d'espaces deux à deux orthogonaux.
Sous-espace orthogonal d'une partie.
Orthgonal d'un sous-espace vectoriel. En général, $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \subsetneq E$.

Bases orthonormées d'un espace euclidien Tout espace euclidien admet une base orthonormée. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expression matricielle du produit scalaire, de la norme. Expression des coefficients de la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ relativement à une base orthonormée.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Théorème de la base orthonormée incomplète. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Expression du projeté orthogonal sur F si on connaît une base orthonormée de F.
Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Formes linéaires sur un espace euclidien Théorème de représentation des formes linéaires, isomorphisme entre E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Vecteur normal à un hyperplan. Distance d'un vecteur à un hyperplan donnée par $d(a, H) = \dfrac{|\langle a, x\rangle|}{\|x\|}$.

Exercices et résultats classiques à connaître

420.1

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$. Montrer qu'en posant :

$$\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Sup}} \left(|f(t)|\right)$$

on définit une norme sur E.

420.2

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de E est convexe.

420.3

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n \;:\; t \mapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in \,]1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ et vérifier que, pour la norme N, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$. Qu'en conclure ?

430.1

Soit A une partie non vide de E espace normé, et $x \in E$.

(a) Justifier l'existence de $d(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a\in A} \|x-a\| \in \mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que :

$$x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0$$

430.2

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

430.3

Soit H un sous-groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$.

(a) Justifier l'existence de $\alpha = \mathrm{Inf}\{x \in H,\ x > 0\}$.

(b) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in H$, puis $H = \alpha\mathbb{Z}$.

(c) On suppose $\alpha = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. En déduire que $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

430.4

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Montrer que $F = E$.

310.1

On note $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(c) On considère k entier $\geqslant 2$. Calculer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^k - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

310.2

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1,\dots,u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1,\dots,u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i,j est $\langle u_i|u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1,\dots,u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \ldots, e_p, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

310.3

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2 - 1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k \rangle$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

Exercices du CCINP à travailler

0.4 CCINP 1.1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

0.5 CCINP 1.3

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $c : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
Prouver que $c \in \overline{F}$.
F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

0.6 — INP 34

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

0.7 — INP 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}}\ |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

0.8 — INP 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

0.9 — INP 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|\ \|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \underset{a\in A}{\text{Inf}} \|x-a\|$.

   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

0.10 — INP **54.21**

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Sup}}\, |u_n|$.

   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.

0.11 — INP **61.1**

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}{\text{Max}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

0.12 — INP **39.13**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

0.13 — CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

0.14 — CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

0.15 — CCINP 79.23

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\, (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

0.16 — CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

0.17 — CCINP 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

$\boxed{\textbf{0.18}}$ **82**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

$\boxed{\textbf{0.19}}$ **92**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.