# 31 Espaces préhlibertiens réels

**Produit scalaire et norme associée** Produit scalaire. Exemples de références dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Autres exemples.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité, inégalité de Minkowski. Norme euclidienne. Identités remarquables.

**Orthogonalité** Vecteurs orthogonaux, famille orthgonale, famille orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.
Sous-espace orthogonaux. Deux espaces orthogonaux sont en somme directe, on note $\perp\!\!\!\!\bigcirc$ la somme.
Familles d'espaces deux à deux orthogonaux.
Sous-espace orthogonal d'une partie.
Orthgonal d'un sous-espace vectoriel. En général, $F \perp\!\!\!\!\bigcirc F^\perp \subsetneq E$.

**Bases orthonormées d'un espace euclidien** Tout espace euclidien admet une base orthonormée. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expression matricielle du produit scalaire, de la norme. Expression des coefficients de la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ relativement à une base orthonormée.

**Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie** Théorème de la base orthonormée incomplète. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Expression du projeté orthogonal sur $F$ si on connaît une base orthonormée de $F$.
Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

**Formes linéaires sur un espace euclidien** Théorème de représentation des formes linéaires, isomorphisme entre $E$ et $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Vecteur normal à un hyperplan. Distance d'un vecteur à un hyperplan donnée par $d(a,H) = \dfrac{|\langle a,x\rangle|}{\|x\|}$.

# 42 Espaces vectoriels normés

Révision

# 43 Topologie des evn

Révision

# 44 Limite, continuité dans un evn

**Limite** Définition, interprétation en termes de boules, unicité, changement de normes équivalentes.
Caractérisation séquentielle.
Cas particulier de $\mathbb{R}$.
Opérations sur les limites.
Limites par coordonnées, limites des fonctions à valeurs dans un espace produit.

**Continuité** Définition, caractérisation séquentielle, oprérations sur les fonctions continues, continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit.
Continuité et densité.
Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues.
Image réciproque par une application continue d'un fermé, d'un ouvert.

## 45 Continuité des applications linéaires, multilinéaires

**Continuité des applications linéaires** Caractérisation : $u$ continue si et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues.
Si $E$ est de dimension finie, $u$ est continue. Continuité des applications coordonnées.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur), c'est un norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, propriétés.
Adapatation matricielle.

**Continuité des applications multilinéaires** Caractérisation : $u$ continue si et seulement s'il existe $C$ etc. Continuité du produit scalaire dans un préhilbertien.
Applications polynomiales sur $E$ de dimension finie (i.e. polynomiale en les coordonnées des vecteurs dans une base donnée). Toute application polynomiale (sur un espace de dimension finie) est continue.
Toute application multilinéaire sur des espaces de dimensions finies est continue.

## Exercices et résultats classiques à connaître

**31.1**

On note $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(c) On considère $k$ entier $\geqslant 2$. Calculer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^k - at - b\right)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

**31.2**

Soit $E$ un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1,\ldots,u_p)$ famille de vecteurs de $E$, on note $G(u_1,\ldots,u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice $i,j$ est $\langle u_i|u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1,\ldots,u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1,\ldots,e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, alors, pour tout $x \in E$ :

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1,\ldots,e_p,x)}{\det G(e_1,\ldots,e_p)}}$$

**31.3**

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $E$.
On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2-1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de $f_k$.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un $\lambda_k$ tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

**44.1**

Soit $A$ une partie non vide de $E$ espace normé. Montrer que l'application :

$$x \mapsto d(x, A)$$

est continue sur $E$.

**44.2**

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

**44.3**

Soit $E$ un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

**45.1**

(a) Montrer que det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**45.2**

Soit $E$ un espace normé. Montrer que tout hyperplan de $E$ est dense ou fermé.

**45.3**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ défini par :

$$\forall t \in [0,1],\ u(f)(t) = f(t) - f(0)$$

(a) Montrer que $u$ est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $u$ n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elle équivalentes ?

## Exercices du CCINP à travailler

**0.4** CCINP 39.13

On note $\ell^2$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que $\ell^2$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans $\ell^2$.
On suppose que $\ell^2$ est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

3. On considère l'ensemble $F$ des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer $F$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

**0.5** CCINP 76

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure $m$ et déterminer la valeur de $m$.

**0.6** **77**

Soit $E$ un espace euclidien.

1. Soit $A$ un sous-espace vectoriel de $E$.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

**0.7** **79.23**

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$.

2. Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**0.8** **80**

Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

**0.9** **81**

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi$ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice $A^T$ par la matrice $A'$.
On admet que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$ .

4. Calculer la distance de $J$ à $\mathcal{F}$.

**0.10** — CCINP 82

Soit $E$ un espace préhilbertien et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie $n > 0$.
On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique $y_0$ de $F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à $F$ et que la distance de $x$ à $F$ soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $F$ des matrices triangulaires supérieures.

**0.11** — CCINP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et $A^T$ désigne la transposée de la matrice $A$.

1. Prouver que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $E$.
   Une matrice $A$ de $E$ est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $E$.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $F$ l'ensemble des matrices diagonales de $E$.
   Déterminer $F^\perp$.

**0.12** — CCINP 35

$E$ et $F$ désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $||\ ||_E$ ( respectivement $||\ ||_F$) la norme sur $E$ (respectivement sur $F$).

1. Soient $f$ une application de $E$ dans $F$ et $a$ un point de $E$.
   On considère les propositions suivantes :
   **P1.** $f$ est continue en $a$.
   **P2.** Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit $A$ une partie dense dans $E$, et soient $f$ et $g$ deux applications continues de $E$ dans $F$.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

**0.13** INP 1.2

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2. Dans cette question, on munit $E$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) Soit $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}\right.$
   Prouver que $u$ est une application continue sur $E$.
   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
   Prouver que $F$ est une partie fermée de $E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**0.14** INP 36

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $||\ ||_E$ ( respectivement $||\ ||_F$) la norme sur $E$ (respectivement sur $F$).

1. Démontrer que si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   **P1.** $f$ est continue sur $E$.

   **P2.** $f$ est continue en $0_E$.

   **P3.** $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0;1]}{\operatorname{Sup}} |f(x)|$ . On considère l'application $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que $\varphi$ est linéaire et continue.

**0.15** INP 38

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall f \in E, ||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x\ \in [0,1],\ g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que $u$ est un endomorphisme de $E$.

   Prouver que $u$ est continue et calculer $|||u|||$.
   **Indication** : considérer, pour tout entier $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n$-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.

(a) Justifier que $u$ est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \, ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Calculer $|||u|||$.

(c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \, ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel $E$, une norme sur $E$ et un endomorphisme de $E$ non continu pour la norme choisie. Justifier.

**Remarque** : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

**0.16** **39.2**

On note $\ell^2$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $( \, | \, )$ est un produit scalaire dans $\ell^2$.
On suppose que $\ell^2$ est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $|| \, ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire et continue de $\ell^2$ dans $\mathbb{R}$.

**0.17** **54.23**

Soit $E$ l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall \, u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

(b) Prouver que : $\forall \, u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose : $\forall \, u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que $f$ est continue sur $E$.