## 420. Espaces vectoriels normés

Révision du programme précédent.

## 430. Topologie des evn

Révision du programme précédent.

## 440. Limite, continuité dans un evn

**Limite** Définition, interprétation en termes de boules, unicité, changement de normes équivalentes.
Caractérisation séquentielle.
Cas particulier de $\mathbb{R}$.
Opérations sur les limites.
Limites par coordonnées, limites des fonctions à valeurs dans un espace produit.

**Continuité** Définition, caractérisation séquentielle, oprérations sur les fonctions continues, continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit.
Continuité et densité.
Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues.
Image réciproque par une application continue d'un fermé, d'un ouvert.

## 450. Continuité des applications linéaires, multilinéaires

**Continuité des applications linéaires** Caractérisation : $u$ continue si et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues.
Si $E$ est de dimension finie, $u$ est continue. Continuité des applications coordonnées.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur), c'est un norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, propriétés.
Adapatation matricielle.

**Continuité des applications multilinéaires** Caractérisation : $u$ continue si et seulement s'il existe $C$ etc. Continuité du produit scalaire dans un préhilbertien.
Applications polynomiales sur $E$ de dimension finie (i.e. polynomiale en les coordonnées des vecteurs dans une base donnée). Toute application polynomiale (sur un espace de dimension finie) est continue.
Toute application multilinéaire sur des espaces de dimensions finies est continue.

## 310. Espaces préhlibertiens réels

Révision du programme précédent, et particulièrement la projection orthogonale et la distance à un sous-espace vectoriel.

## 320. Endomorphisme des espaces euclidiens (le début)

**Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien** Définition, matrice en base orthonormée. Propriétés. Si $F$ est stable par $u$, $F^\perp$ est stable par $u^*$.

**Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien** Définition, notation $\mathcal{S}(E)$. Si $F$ est stable par $u$ autoadjoint, $F^\perp$ aussi. Caractérisation par la matrice dans une base orthonormée.
Projecteur orthgonaux.
**Le théorème spectral**, version endomorphisme, version matricielle.
Endomorphismes autoadjoints positifs, définis-positifs. Matrices symétriques positives, définies-positives.
Caractérisations spectrales.

**Isométries d'un espace euclidien** Définition d'une isométrie vectorielle, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation avec l'adjoint. Une isométrie vectorielle est un automorphisme, déterminant. Groupe orthogonal, sous-groupe spécial orthogonal.

**Matrices orthogonales** Définition : $A^\top A = I_n$, caractérisations. Lien avec les isométries vectorielles. Matrice de passage entre bases orthonormées. Propriétés, groupe orthogonal, sous-groupe spécial orthogonal.

## Exercices et résultats classiques à connaître

**440.1**

Soit $A$ une partie non vide de $E$ espace normé. Montrer que l'application :

$$x \mapsto d(x, A)$$

est continue sur $E$.

**440.2**

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

**440.3**

Soit $E$ un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

**450.1**

(a) Montrer que det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**450.2**

Soit $E$ un espace normé. Montrer que tout hyperplan de $E$ est dense ou fermé.

**450.3**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ défini par :

$$\forall t \in [0,1],\ u(f)(t) = f(t) - f(0)$$

(a) Montrer que $u$ est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $u$ n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(c) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elle équivalentes ?

**320.1**

Soit $E$ espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de $E$ sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

**320.2**

Soit $E$ espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de $E$ sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

**320.3**

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $S = R^2$

(b) **[*]** Montrer l'unicité de cette matrice $R$.

**320.4**

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :
$A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**320.5**

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de $V$ la matrice : $H_V = I_n - \dfrac{2}{\|V\|^2} VV^\top$
Montrer que $H_V$ est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

**320.6**

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top HX$.

(b) Montrer que $H$ est une matrice symétrique, définie positive.
*On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.*

**320.7**

Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$$

## Exercices du CCINP à travailler

**0.8** CCINP 35

$E$ et $F$ désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $||\ ||_E$ ( respectivement $||\ ||_F$) la norme sur $E$ (respectivement sur $F$).

1. Soient $f$ une application de $E$ dans $F$ et $a$ un point de $E$.

   On considère les propositions suivantes :

   **P1.** $f$ est continue en $a$.

   **P2.** Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit $A$ une partie dense dans $E$, et soient $f$ et $g$ deux applications continues de $E$ dans $F$.

   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

**0.9** CCINP 1.2

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2. Dans cette question, on munit $E$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   (a) Soit $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0)\end{array}\right.$
   Prouver que $u$ est une application continue sur $E$.

   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
   Prouver que $F$ est une partie fermée de $E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**0.10** CCINP 36

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $||\ ||_E$ ( respectivement $||\ ||_F$) la norme sur $E$ (respectivement sur $F$).

1. Démontrer que si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

**P1.** $f$ est continue sur $E$.
**P2.** $f$ est continue en $0_E$.
**P3.** $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

2. Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}} |f(x)|$ . On considère l'application $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que $\varphi$ est linéaire et continue.

$\boxed{\textbf{0.11}}$ **38**

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||\,||_1$ définie par : $\forall f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u$ : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que $u$ est un endomorphisme de $E$.

   Prouver que $u$ est continue et calculer $|||u|||$.
   **Indication** : considérer, pour tout entier $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n$-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$ .

   (a) Justifier que $u$ est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\,||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.

   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\,||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.
   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel $E$, une norme sur $E$ et un endomorphisme de $E$ non continu pour la norme choisie. Justifier.

**Remarque** : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

$\boxed{\textbf{0.12}}$ **39.2**

On note $\ell^2$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans $\ell^2$.
On suppose que $\ell^2$ est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire et continue de $\ell^2$ dans $\mathbb{R}$.

**0.13** INP 54.23

Soit $E$ l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que $f$ est continue sur $E$.

**0.14** INP 63

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme $u$ de $E$, on note $u^*$ l'adjoint de $u$.

1. Un endomorphisme $u$ de $E$ vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

**0.15** INP 66

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

**0.16** INP 78

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de $x$ et de $y$ et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit $u$ un endomorphisme de $E$, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

(a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

(b) Démontrer que $u$ est bijectif.

2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $E$,
c'est-à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de $E$.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de $E$.