32 Endomorphisme des espaces euclidiens (le début)

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien Définition, matrice en base orthonormée. Propriétés. Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien Définition, notation $\mathcal{S}(E)$. Si F est stable par u autoadjoint, $F^\perp$ aussi. Caractérisation par la matrice dans une base orthonormée.
Projecteur orthgonaux.
Le théorème spectral, version endomorphisme, version matricielle.
Endomorphismes autoadjoints positifs, définis-positifs. Matrices symétriques positives, définies-positives. Caractérisations spectrales.

Isométries d'un espace euclidien Définition d'une isométrie vectorielle, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation avec l'adjoint. Une isométrie vectorielle est un automorphisme, déterminant. Groupe orthogonal, sous-groupe spécial orthogonal.

Matrices orthogonales Définition : $A^\top A = I_n$, caractérisations. Lien avec les isométries vectorielles. Matrice de passage entre bases orthonormées. Propriétés, groupe orthogonal, sous-groupe spécial orthogonal.

46 Compacité

Suites extraites, valeurs d'adhérence d'une suite Suites extraites, extractrices. Valeurs d'adhérence d'une suite. Cas des suites convergentes.

Parties compactes d'un evn X est dite compacte lorsque, de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une suite qui converge dans X. Un compact est fermé et borné. Un fermé relatif d'un compact est compact. Un suite d'un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Produit d'une famille finie de compacts.

Applications continues sur une partie compacte L'image d'un compact par une application continue est compacte. Théorème des bornes atteintes.
Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, théorème de Bolzano-Weierstrass.
Équivalence des normes en dimension finie.
Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

47 Dérivation, intégration des fonctions vectorielles de variable réelle

Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles Définition, caractérisation. Interprétation cinématique.
Opérations sur les dérivées. Combinaison linéaire, image par une application linéaire, bilinéaire, multilinéaire, composée par une fonction numérique. Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Caractérisation des fonctions constantes.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
Théorème limite de la dérivée, de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement.

Intégration des fonctions à valeurs vectorielles Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Propriétés. Sommes de Riemann. Primitives.
Accroissements finis, formules de Taylor.

57 Séries à termes dans un evn de dimension finie

Séries à termes dasn un evn de dimension finie Somme partielle, divergence, somme, reste d'une série convergente. Divergence grossière. Opérations, lien suite-série. Caractérisation par les coordonnées dans une base.
Convergence absolue. Dans un evn de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, elle converge.

Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie. Cas d'une matrice diagonale, triangulaire, nilpotente. Propriétés : exponentielles de matrices semblables, spectre. Si $AB = BA$, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

58 Suites et séries de fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie

Suites de fonctions Convergence simple, norme infinie sur un evn de dimension finie, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout compact, continuité de la limite, double limite, intégration sur un segment, limite d'une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale, continuité de la somme, double limite, intégration sur un segment, limite d'une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$.

Exercices et résultats classiques à connaître

32.1

Soit E espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de E sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

32.2

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

32.3

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $S = R^2$

(b) Montrer l'unicité de cette matrice R.

32.4

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :
$A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

32.5

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de V la matrice : $H_V = I_n - \dfrac{2}{\|V\|^2} VV^\top$
Montrer que H_V est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

32.6

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top H X$.

(b) Montrer que H est une matrice symétrique, définie positive.
On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.

32.7

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max} \operatorname{Sp}(u)$$

46.1

On note $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^\top M = I_n\}$.
Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est compact.

46.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

46.3

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.

57.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

57.2

Soit M une matrice carrée d'ordre n, antisymétrique. Montrer que $\exp(M)$ est orthogonale.

57.3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

57.4

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme de A.

Exercices du CCINP à travailler

0.5 **63**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

0.6 **66**

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

0.7 **68.2**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable ~~de quatre manières~~ :

   (a) sans calcul,

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

0.8 **78**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

   (b) Démontrer que u est bijectif.

2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E,
   c'est-à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{\textbf{0.9}}$ **INP 101.22**

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

   (c) Déterminer une matrice P ~~inversible~~ *orthogonale* et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\cancel{D = P^{-1}AP}$ $A = PDP^\top$.

$\boxed{\textbf{0.10}}$ **INP 13**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||\ ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ /\ ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

$\boxed{\textbf{0.11}}$ **INP 40**

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2,\ ||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\displaystyle\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

0.12 — 54.22

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\displaystyle\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

0.13 — 61.23

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

2. Démontrer que : $\forall\, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\displaystyle\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Est-elle convergente ?