710. Continuité des fonctions de plusieurs variables

Contexte Fonctions entre espaces normés, fonctions automatiquement continues, fonctions de plusieurs variables.

Techniques d'étude de la continuité Montrer la continuité par opérations, montrer la continuité en un point, montrer la non continuité en un point. Utilisation de « chemins », des coordonnées polaires.

Continuité sous le signe $\int$ Théorème de continuité des intégrales à paramètre vectoriel.

Suites et séries de fonctions Transfert de continuité en cas de convergence uniforme.

720. Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles dans une base

Différentielle Notation $o(h)$. Différentielle d'une application en un point, définie par développement limité à l'ordre 1. Différentielle d'une constante, d'une application linéaire. Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles lorsque E est muni d'une base. Matrice jacobienne.
Différentielle $\mathrm{d}f$ d'une application sur un ouvert.
Cas où $E = \mathbb{R}$: fonctions d'une variable réelle.
Cas où E est euclidien : gradient.

Applications de classe $\mathcal{C}^1$ Définition, caractérisation par les dérivées partielles lorsque E est muni d'une base.

Opérations sur les applications différentiables, de classe $\mathcal{C}^1$ Linéarité, composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire. Composition d'applications différentiables. Dérivée le long d'un arc. Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée. Caractérisation des applications constantes.

730. Optimisation

Étude au premier ordre Extremum local, global, d'une fonction numérique. Point critique.
Condition nécessaire du premier ordre.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$ Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$, classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwarz. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Étude au second ordre Matrice hessienne.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
Condition nécessaire d'ordre 2, condition suffisante d'ordre 2. Point-col.

460. Compacité

Suites extraites, valeur d'adhérence d'une suite Extractrice, suite extraite d'une suite extraite. Caractérisation des valeurs d'adhérences. Cas des suites convergentes.

Parties compactes d'un espace vectoriel normé Définition (BW). Tout compact est fermé et borné.
Un fermé relatif d'un compact est compact.
Un produit fini de compact est un compact.

Applications continues sur une partie compacte Image d'un compact par une application continue.
Théorème des bornes atteintes.
On sait montrer que, si $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de réels ou complexes on peut extraire une suite convergente.

Équivalence des normes en dimension finie

Compacts d'un espace de dimension finie Caractérisation comme fermés-bornés. Les sous-espaces de dimension finie de E sont fermés.

470. Dérivation et intégration des fonctions vectorielles

Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, de variable réelle Limite du taux d'accroissement, caractérisation par DL1, interprétation cinématique.
Opérations sur les dérivées : combinaisons linéaires, image par une application linéaire, bilinéaire, multilinéaire, composée. Caractérisation par les fonctions coordonnées. Caractérisation des fonctions constantes.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
Limite de la dérivée. Classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement.

Intégration des fonctions à valeurs vectorielles Intégrale d'une fonction en escalier, continue par morceaux, sur un segment. Propriétés. Sommes de Riemann. Primitives.
Accroissements finis, formules de Taylor.

570. Séries à termes dans un espace normé de dimension finie

Séries à termes dans un espace normé de dimension finie Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente. Divergence grossière. Combinaisons linéaires. Lien suite-série. Indépendance du choix de la norme.
Caractérisation par les coordonnées dans une base.
Convergence absolue. Dans un espace de dimension finie, la convergence absolue implique la convergence.

Séries de matrices, d'endomorphismes Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie. Cas des matrices diagonales, triangulaires, nilpotentes.
Exponentielles de matrices semblables, spectre de $\exp(A)$, continuité de exp, inversibilité et inverse de $\exp(A)$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ lorsque $AB = BA$.

580. Suites et séries de fonctions à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Suites de fonctions Convergence simple.
Norme infinie sur un espace de dimension finie.
Convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple. Convergence uniforme sur tout compact.
Transfert de continuité par convergence uniforme (sur tout compact). Double limite.
Interversion limite/intégrale par convergence uniforme sur un segment.
Classe $\mathcal{C}^1$ de la limite d'une suite de fonctions. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions Convergence simple.
Convergence uniforme. Caractérisation. La convergence uniforme implique la convergence simple.
Convergence normale. Caractérisation. La convergence normale implique la convergence absolue en tout point, la convergence uniforme.
Transfert de continuité.
Double limite.
Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.
Classe $\mathcal{C}^1$ de la somme d'une série de fonctions. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.
Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercices et résultats classiques à connaître

720.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

720.2

On définit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :

$$f(M) = \mathrm{tr}(M^2)$$

Montrer que f est différentiable, et calculer sa différentielle en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

730.1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

(a) Prolonger f par continuité en $(0,0)$.

(b) Montrer l'existence et comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

730.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$.
On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < R^2\}$ et on définit sur D la fonction f par :

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\mathrm{i}y)^n$$

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D, et qu'elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

730.3

Déterminer les extremums locaux de :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 - 2x + 2 + \cos(y)$$

730.4

On considère $f\ :\ (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$$

(a) Justifier que f admet un maximum sur A.

(b) Montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur à A.

(c) Déterminer la valeur de ce maximum.

460.1

On note $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^\top M = I_n\}$.
Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est compact.

460.2

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

460.3

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.

570.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$.

570.2

Soit M une matrice carrée d'ordre n, antisymétrique. Montrer que $\exp(M)$ est orthogonale.

570.3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

570.4

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme de A.

Exercices du CCINP à travailler

0.5 CCINP 33

On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},\ f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

0.6 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

0.7 56

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

0.8 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

0.9 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|,$ où $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \|(x, y)\| = \mathrm{Max}(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ / \forall\, (x, y) \in E \times E,\ |B(x, y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

0.10 CCINP 13

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||\ ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots. + a_n X^n$ de E par : $||P||_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

   (a) Justifier que $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

0.11 CCINP 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2,\ ||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

0.12 CCINP 54

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

0.13 CCINP 61

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Est-elle convergente ?