32 Endomorphisme des espaces euclidiens (tout)

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Isométries d'un espace euclidien

Matrices orthogonales

Orientation Orientation d'un espace vectoriel réel : bases de même orientation, relation d'équivalence, orienter l'espace.
Orientation d'un hyperplan par le choix d'un vecteur normal.
Espace euclidien orienté, produit mixte.

Étude des isométries vectorielles Isométries vectorielles directes en dimension 2. Morphisme $\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{U} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, rotation vectorielle en dimension 2.
Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls.
Isométries vectorielles indirectes en dimension 2.
Réduction des isométries en dimension n. Cas particulier de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

71 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Position du problème Fonctions entre evn, fonctions automatiquement continues, fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et fonctions composantes, fonctions de plusieurs variables réelles.

Technique d'étude de la continuité Montrer la continuité « par opérations » sur un ensemble, montrer la non continuité en un point à l'aide des applications partielles, ou de chemins. Montrer la continuité ou l'existence d'une limite en un point. Utilisation des coordonnées polaires.

Continuité sous le signe $\int$ Fonctions $X \times I \to \mathbb{K}$. On insiste sur l'hypothèse de domination.

Suites et séries de fonctions Fonctions $X \subset E \to F$. On insiste sur l'hypothèse de convergence uniforme.

72 Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles dans une base

Différentielle Notation $o(h)$, différentielle d'une application en un point. Différentielle d'une application constante, d'une application linéaire. Si f est différentiable, elle est continue. Pour une fonction différentiable, expression des dérivées selon un vecteur et la différentielle, expression à l'aide des dérivées partielles.
Différentielle d'une application sur un ouvert.
Cas d'une fonction d'une variable réelle. Cas où E est euclidien, gradient. Interprétation géométrique.

Applications de classe $\mathcal{C}^1$ Définition, caractérisation par les dérivées partielles dans une base.

Opérations sur les applications différentiables, de classe $\mathcal{C}^1$ Combinaison linéaire, composée avec une application bilinéaire, multilinéaire. Règle de la chaîne. Dérivée le long d'un arc. Fonctions composées. Caractérisation des applications constantes sur un convexe (plus tard : connexe par arcs).

Vecteurs tangents à une partie d'un evn Défintion. Cas d'une partie définie par une équation $g(x) = 0$ où g est $\mathcal{C}^1$.

73 Optimisation

Optimisation : étude au premier ordre Extremum d'une fonction numérique. Point critique. Condition nécessaire du premier ordre.
Optimisation sous contrainte.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$ Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$. Théorème de Schwarz. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Exemples d'équations aux dérivées partielles.

Optimisation : étude au second ordre Matrice hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Condition nécessaire du second ordre, condition suffisante du second ordre.

Exercices et résultats classiques à connaître

72.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

72.2

On définit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :

$$f(M) = \mathrm{tr}(M^2)$$

Montrer que f est différentiable, et calculer sa différentielle en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

72.3

Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2axy$$

72.20

Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

73.1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

(a) Prolonger f par continuité en $(0,0)$.

(b) Montrer l'existence et comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

73.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < R\}$ et on définit sur D la fonction f par :

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n$$

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D, et qu'elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

73.3

Déterminer les extremums locaux de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 - 2x + 2 + \cos(y)$$

73.4

On considère $f\ :\ (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$$

(a) Justifier que f admet un maximum sur A.

(b) Montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur à A.

(c) Déterminer la valeur de ce maximum.

73.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f\ :\ (x,y) \mapsto xy$ sur Γ.

Exercices du CCINP à travailler

0.6 CCINP 33

On pose : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

0.7 CCINP 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

0.8 CCINP 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

0.9 CCINP 72

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

0.10 CCINP 41

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $$(S)\ :\ \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

0.11 CCINP 56

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.