

670. Équations différentielles linéaires

Généralités Une équation différentielle linéaire est une équation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ sont continues. Équation homogène associée, solution. Traduction matricielle, système différentiel linéaire. Principe de superposition.

Problème de Cauchy.

Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n .

Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de Cauchy-linéaire.

Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Système fondamental de solutions.

Structure de l'ensemble des solutions de l'équation complète.

671. Résolution des équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 Définition, équation normalisable, structure de l'ensemble des solutions.

Méthodes de résolution, présentation de la variation de la constante comme un changement de fonction inconnue. Exemples de raccordement des solutions.

Équation différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 Définition, équation normalisable, structure de l'ensemble des solutions.

Étude de l'équation homogène, wronskien.

Méthode de variations des constantes.

Recherche de solutions développables en série entière.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants Définition, structure de l'ensemble des solutions.

Résolution à l'aide de l'exponentielle de matrices.

Problème de Cauchy, théorème de Cauchy-linéaire.

Résolution effective en cas de diagonalisabilité.

720. Calcul différentiel

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie Notation $T_x X$. Exemple. Si $X = \{x \in U, g(x) = 0\}$ et $dg(x) \neq 0$, alors $T_x X = \text{Ker } dg(x)$. Et si E euclidien, $T_x X = (\text{grad } g(x))^\perp$.

730. Optimisation

Optimisation sous contrainte Si $X = \{x \in U, g(x) = 0\}$, $dg(x) \neq 0$, alors si $f|_X$ admet un extremum en x , alors $df(x)$ et $dg(x)$ sont colinéaires. Colinéarité des gradients lorsque E est euclidien.

320. Endomorphisme des espaces euclidiens (matrices orthogonales)

Matrices orthogonales Définition : $A^\top A = I_n$, caractérisations. Lien avec les isométries vectorielles. Matrice de passage entre bases orthonormées. Propriétés, groupe orthogonal, sous-groupe spécial orthogonal.

Orientation Orientation d'un espace vectoriel réel. Orientation d'un hyperplan. Espace euclidien orienté, produit mixte.

Étude des isométries vectorielles Isométries vectorielles en dimension 2 directes, mesure d'angle orienté entre deux vecteurs non nuls, isométries vectorielles en dimension 2 indirectes. Réduction des isométries en dimension n . Cas particulier de la dimension 3.

Exercices et résultats classiques à connaître

720.3

Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy$$

720.4

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n .

730.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ .

671.1

On considère sur $]0, 1[$ l'équation :

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

- (a) Déterminer une solution non nulle, développable en série entière, notée y_0 .
- (b) Résoudre l'équation en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)y_0(x)$$

671.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = e^x$$

en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$z(x) = (1 + e^x)y(x)$$

671.3

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $x = e^t$.

Exercices du CCINP à travailler**0.4** **31**

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

0.5 **32**

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

0.6 **42**

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

0.7 **41**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
 - (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$
 - (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
En déduire les valeurs possibles de λ .
3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

0.8 **56**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.