

Aux colleurs

C'est la dernière semaine de colle. On pourra proposer, en plus d'un exercice correspondant à ce programme de colle, un second exercice portant sur l'ensemble du programme de CPGE. Merci à chacun de votre participation à la préparation des étudiants de MPI et MPI*.

111. Groupes cycliques

Sous-groupe engendré par une partie Intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie, notation $\langle A \rangle$, expression par une intersection, description des éléments de $\langle A \rangle$ dans le cas d'un groupe noté multiplicativement, additivement.

Interlude : le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ Relation d'équivalence de congruence modulo n , classes d'équivalences, addition et structure de groupe, application $a \mapsto \bar{a}$.

Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour définir un morphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$, on définit un morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow G$ dont le noyau contient $n\mathbb{Z}$.

Groupes monogènes, groupes cycliques Définition, exemples, description de $\langle x \rangle$.

Un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ordre d'un élément dans un groupe Élément d'ordre fini, ordre d'un élément. $\text{ord}(x) = \text{Card}(\langle x \rangle)$. Si G est un groupe fini et $x \in G$, alors x est d'ordre fini et $\text{ord}(x) \mid \text{Card}(G)$.

140. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Congruences Définition, compatibilité avec les lois. Petit théorème de Fermat.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Classes d'équivalences, partitions. L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Structure d'anneau, morphisme $a \mapsto \bar{a}$, calcul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Descriptions des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\varphi(n)$ le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indicatrice d'Euler.

Pour $n \geq 2$ et $a \wedge n = 1$, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.

Équivalence entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ anneau intègre, n premier. Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.

Le théorème chinois Structure d'anneau produit. Le théorème chinois.

Indicatrice d'Euler Pour m, n premiers entre eux, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Pour p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Pour $n \geq 2$,

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

480. Connexité par arcs

Parties connexes par arcs Chemin continu joignant a à b dans A , relation d'équivalence.
Composantes connexes par arcs, connexité par arcs. Les convexes sont connexes par arcs. Les parties étoilées sont connexes par arcs.

Image d'une connexe par arcs par une application continue.

Le cas de $\mathbb{R}$ Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Théorème des valeurs intermédiaires pour $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque A est connexe par arcs et f continue.

Caractérisation des fonctions de plusieurs variables constantes Une fonction f de classe $\mathbb{C}^1$ sur un ouvert connexe par arc est constante si et seulement si sa différentielle est nulle.

160. Groupe symétrique

Révision du cours de première année. Orbite ; cycle, support, longueur ; transposition ; décomposition en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions.

Exercices et résultats classiques à connaître**111.1**

Soit G un groupe cyclique de générateur a , et H un sous-groupe de G .

- (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel n non nul tel que $a^n \in H$.
- (b) Montrer que $H = \langle a^n \rangle$.

On a montré que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

480.1

Illustrer qu'il existe une partie A telle que :

- (a) $\overset{\circ}{A}$ connexe par arc et A non connexe par arcs.
- (b) A connexe par arcs et $\overset{\circ}{A}$ non connexe par arcs.
- (c) $\overline{A}$ connexe par arcs et A non connexe par arcs.

480.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, A et B deux parties connexes par arcs de E .

- (a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
- (b) En déduire que $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

480.3

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de E espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que, si $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe par arcs.

Exercices du CCINP à travailler**0.4** **86**

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.

(a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

0.5 **94**

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 5 & [6] \\ x \equiv 4 & [8] \end{cases}$$

n'a pas de solution x appartenant à $\mathbb{Z}$.

2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
- (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

- (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
- (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .
On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0 .