Aux colleurs

Je vous remercie d'**interroger systématiquement les étudiants sur un « exercice ou résultat classique »**, qu'ils auront préparé, puis de proposer un ou deux exercices en privilégiant les raisonnements très classiques aux astuces. Si l'exercice préparé est long, il pourra être tronqué.

210. Compléments d'algèbre linéaire

Tout le programme de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires de familles finies, infinies, familles libres, familles génératrices, bases. Base incomplète, base extraite. Applications linéaires, noyau, image, théorème du rang (version géométrique et sur les dimension), $u \circ v = 0$, projecteurs, symétries.
Produit d'espaces vectoriels, somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe, projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe, lien avec les bases. Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base, par les restrictions à des sous-espaces en somme directe. Rang.

220. Compléments sur les matrices

Tout le programme de première année, en particulier :
Matrice comme tableau de scalaires. Bilinéarité de $(A, B) \mapsto A \times B$. Équivalence $AB = 0$ et $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Base canonique, produit de matrices élémentaires.
Opérations par blocs, interprétation du produit matriciel par les colonnes.
Matrices représentant un vecteur, une famille de vecteurs. Caractérisation des bases, matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Matrices représentant une application linéaire. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}(u)$, propriétés. Matrice de $u(x)$. Théorème du rang matriciel.
Formules de changement de base pour un vecteur, pour un endomorphisme.
Matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
Trace d'une matrice, propriétés. Trace d'un endomorphisme. La trace d'un projecteur est égale à son rang.
Sous-espaces stables, endomorphisme induit. Si u et v commutent, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. Lien entre stabilité et matrices par blocs.

Exercices et résultats classiques à connaître

210.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme nilpotent d'indice n, i.e. $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x\right) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

210.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

(a) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} f^p)_p$ est croissante pour l'inclusion.

(b) Justifier l'existence d'un plus petit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^{r+1}$.

(c) Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} f^p)_p$ est constante à partir du rang r.

(d) Démontrer que :

$$E = \operatorname{Ker} f^r \oplus \operatorname{Im} f^r$$

(e) Que peut-on dire de la suite $(\operatorname{Im} f^p)_p$?

210.3

Soit f un endomophisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

220.1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

220.2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

220.3

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

220.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^\top$.

(b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, et vérifier que $\lambda = \operatorname{tr}(A)$.

Exercices du CCINP à travailler

0.5 — CCINP 55.1

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

0.6 INP 59.12

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

0.7 INP 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

0.8 INP 62.123

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

0.9 INP 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

0.10 INP 69.1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

0.11 CCINP 71

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

0.12 CCINP 93.1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.