21 Compléments d'algèbre linéaire

Tout le programme de première année, sans encore les matrices : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires de familles finies, infinies, familles libres, familles génératrices, bases. Base incomplète, base extraite. Applications linéaires, noyau, image, théorème du rang (version géométrique et sur les dimension), $u \circ v = 0$, projecteurs, symétries.
Produit d'espaces vectoriels, somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe, projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe, lien avec les bases. Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base, par les restrictions à des sous-espaces en somme directe. Rang.

11 Compléments sur les groupes

Révision du programme de première année : loi de composition interne, définitions et propriétés, partie stable. Groupe, exemples, groupe produit, sous-groupes. Morphismes de groupes, noyau, image, isomorphisme.
Sous-groupe engendré par une partie : intersection, plus petit sous-groupe, description extensive.
Interlude : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Relation de congruence modulo n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, loi de groupe. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est engendré par $\overline{k}$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.
Groupe monogène, groupe cyclique. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Description de $\langle a \rangle$. Théorème : un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Ordre d'un élément dans un groupe. Définition, caractérisation. Si G est fini, l'ordre d'un élément divise le cardinal de G.

Exercices et résultats classiques à connaître

21.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme nilpotent d'indice n, i.e. $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$\left(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x\right) \text{ base de } E$$

Quelle est la matrice de f dans cette base ?

21.2

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_p = \operatorname{Im}(f^p) \text{ et } K_p = \operatorname{Ker}(f^p)$$

où $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

(a) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (resp. $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$) est décroissante (resp. croissante) pour l'inclusion.

On suppose maintenant que E est de dimension finie.

(b) Justifier l'existence de $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_{r+1} = I_r$.

(c) Montrer que les deux suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang r.

(d) Justifier que :

$$I_r \oplus K_r = E$$

21.3

Soit f un endomophisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est un homothétie.

11.1

Soit $(G, \star)$ un groupe. On définit son **centre** comme l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G :

$$C = \{g \in C,\ \forall h \in G,\ g \star h = h \star g\}$$

Montrer que C est un sous-groupe de $(G, \star)$.

11.2

Montrer que, si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors il est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
Dans le cas où $G \neq \{0\}$, on s'intéressera à $\alpha = \mathrm{Inf}(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ et on discutera selon que $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$.

Exercices du CCINP à travailler

0.3 — CCINP **55.1**

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

0.4 — CCINP **59.12**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

0.5 — CCINP **60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.

4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

0.6 **62.123**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

0.7 **64**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

0.8 **71**

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

0.9 **93.1**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u = E$.