Aux étudiants

On se présente en colle en étant au point sur les exercices classiques, et sur les exercices sélectionnés du CC-INP, même ceux qui n'ont pas été travaillés en classe.

21 Compléments d'algèbre linéaire

Tout le programme de première année, sans encore les matrices : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires de familles finies, infinies, familles libres, familles génératrices, bases. Base incomplète, base extraite. Applications linéaires, noyau, image, théorème du rang (version géométrique et sur les dimension), $u \circ v = 0$, projecteurs, symétries.
Produit d'espaces vectoriels, somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe, projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe, lien avec les bases. Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base, par les restrictions à des sous-espaces en somme directe. Rang.

22 Compléments sur les matrices

Matrice comme tableau de scalaires. Bilinéarité de $(A, B) \mapsto A \times B$. Équivalence $AB = 0$ et $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Base canonique, produit de matrices élémentaires.
Opérations par blocs, interprétation du produit matriciel par les colonnes.
Matrices représentant un vecteur, une famille de vecteurs. Caractérisation des bases, matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Matrices représentant une application linéaire. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}(u)$, propriétés. Matrice de $u(x)$. Théorème du rang matriciel.
Formules de changement de base pour un vecteur, pour un endomorphisme.
Matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
Trace d'une matrice, propriétés. Trace d'un endomorphisme. La trace d'un projecteur est égale à son rang.
Sous-espaces stables, endomorphisme induit. Si u et v commutent, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. Lien entre stabilité et matrices par blocs.

Exercices et résultats classiques à connaître

22.1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22.2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

22.3

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

22.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^\top$.

(b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, et vérifier que $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

Exercices du CCINP à travailler

0.5 CCINP **59.1**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif

   (b) en utilisant une matrice de f.

0.6 CCINP **69.1**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

0.7 CCINP **60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$ défini par : $f\,(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

0.8 **62.123**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

0.9 **71**

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.