Aux étudiants

On se présente en colle en étant au point sur les exercices classiques, et sur les exercices sélectionnés du CC-INP, même ceux qui n'ont pas été travaillés en classe.

53 Suites de fonctions numériques

Convergence simple, propriétés.
Interlude : la norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées. On sait rédiger l'inégalité triangulaire.
Convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple. Étude pratique pour montrer la convergence uniforme, pour montrer la non convergence uniforme. Propriétés.
Transfert de continuité par convergence uniforme. Intérêt de la convergence uniforme sur tout segment de I (ou famille d'intervalles adaptée).
Théorème de la double limite.
Interversion limite/intégrale sur un segment lorsqu'il y a convergence uniforme.
Théorèmes d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, de Weierstrass.

Attention Pas de convergence dominée, nous n'avons pas encore travaillé les intégrales généralisées.

54 Séries de fonctions numériques

Modes de convergence d'une série de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme, caractérisation, propriétés. Convergence normale, étude pratique à l'aide d'une suite majorante uniforme du terme général. Lien entre les différents modes de convergence.
Transfert de continuité en cas de convergence uniforme. Intérêt de la convergence uniforme sur tout segment de I (ou famille d'intervalles adaptée).
Théorème de la double limite.
Théorème de la classe $\mathcal{C}^1$. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
Intégration terme à terme sur un segment en cas de convergence uniforme. Primitivation terme à terme en cas de convergence uniforme sur tout segment.

Attention Pas d'interversion somme/intégrale, nous n'avons pas encore travaillé les intégrales généralisées.

Exercices et résultats classiques à connaître

53.1

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x(1 + \mathrm{e}^{-nx})$$

(a) Sur quelle partie D de $\mathbb{R}$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement ?

(b) La convergence est-elle uniforme sur D ?

(c) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

53.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

53.3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

54.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

54.2

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0,\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

54.3

On considère :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(a) Montrer que f est définie sur $]-1,+\infty[$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.

(c) Déterminer la limite de f en -1 à droite.

54.4

Pour $x \in [-1,1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(a) Montrer que g est continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

(b) Est-ce que g est dérivable en 1 ?

Exercices du CCINP à travailler

0.5 — CCINP 9

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

0.6 — CCINP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

0.7 — CCINP 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.

   Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

0.8 — CCINP 48

$C^0([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

0.9 **16**

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

0.10 **17**

Soit $A\subset\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions }\sum f_n\text{ converge uniformément sur }A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions }\ (f_n)\ \text{ converge uniformément vers 0 sur }A)$$

2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.