

Aux étudiants

On se présente en colle au point sur les exercices classiques et sur les exercices sélectionnés du cc-INP.

Aux colleurs

Les parties repérées par [*] ne concernent que les étudiants de MPI*, et pas ceux de MPI.

240. Diagonalisation

Révision

250. Polynômes d'endomorphisme, de matrice

Polynôme d'un endomorphisme Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, définition de $P(u)$. On dit que P est annulateur de u lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres, dont l'image est $\mathbb{K}[u]$ et le noyau un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Règles de calcul.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie.

Si π_u existe et est de degré d , alors $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Polynôme d'une matrice carrée Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, définition de $P(A)$. On dit que P est annulateur de A lorsque $P(A) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres, dont l'image est $\mathbb{K}[A]$ et le noyau un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Règles de calcul.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie.

Si π_A existe et est de degré d , alors $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Lien entre les deux notions $\text{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P(\text{Mat}(u, \mathcal{B}))$.

260. Réduction des endomorphismes et des matrices

Polynômes annulateurs et valeurs propres Si $u(x) = \lambda x$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs. Si E est de dimension finie, les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal.

Traduction matricielle des résultats.

Lemme de décomposition des noyaux Cas de deux polynômes premiers entre eux, de plusieurs polynômes premiers entre eux ; cas d'un polynôme annulateur de u décomposé en facteurs irréductibles.

Polynômes annulateurs et réduction CNS de diagonalisabilité : π_u ou un autre polynôme annulateur est scindé à racine simple.

Si F est stable par u , le polynôme caractéristique (resp. minimal) de l'endomorphisme induit u_F divise celui de u . Si u est diagonalisable, u_F aussi.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Traduction matricielle des résultats.

Attention Pas de trigonalisation cette semaine.

110. Compléments sur les groupes

Révision du programme de première année : loi de composition interne, définitions et propriétés, partie stable. Groupe, exemples, groupe produit, sous-groupes. Morphismes de groupes, noyau, image, isomorphisme.
Sous-groupe engendré par une partie : intersection, plus petit sous-groupe, description extensive.

120. Compléments sur les anneaux

Produit cartésien d'anneaux.

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Idéal engendré par un élément.

Idéaux de $\mathbb{Z}$, pgcd d'entiers, relation de Bézout.

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Divisibilité dans un anneau, lien avec les idéaux engendrés par un élément.

Algèbre, sous-algèbre, morphisme d'algèbres.

Exercices et résultats classiques à connaître**250.1**

Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
Calculer $P(D)$.

250.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

260.1

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

- (a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u .
- (b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.
- (c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v .

260.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^2 - M^\top = I_n$$

Montrer que M est diagonalisable.

260.3

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante, où $n \geq 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{-----} & 1 \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \\ 0 & \text{-----} & 0 \\ | & & | \\ 1 & \text{-----} & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) On souhaite dans cette question déterminer les valeurs propres de A .
 - a1. Quel est le rang de A ?

- a2. Justifier que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 2$.
- a3. On note λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres (éventuellement nulle, égales, complexes). Calculer A^2 puis donner $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$.
- a4. En déduire $\text{Sp}(A)$.

(b) Démontrer que, pour tout $k \geq 3$, il existe λ_k, μ_k tels que :

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k A^2$$

260.4

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{Id}_E$.

Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

260.5

(a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

Exercices du CCINP à travailler

0.6



Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1. les éléments propres de B .

0.7



On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On donne le polynôme caractéristique : $\chi_A = (X - 1)^3$.

- Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

0.8 **62.21**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:

(a) en utilisant le lemme des noyaux.

0.9 **65**

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
- (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
(b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire le polynôme caractéristique de A , puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

0.10 **68.14**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :

(c) en calculant A^2 .

0.11 **88**

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.

- (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .
- (b) u est-il diagonalisable ?
Justifier sa réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

0.12 **93.23**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E .

2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im} u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.