## 240. Diagonalisation

**Éléments propres d'un endomorphisme** Valeur propre, vecteur propre, équation aux éléments propres, sous-espace propre. Étude de la stabilité par $u$ d'une droite vectorielle. La somme d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Si $u \circ v = v \circ u$, les espaces propres de $u$, le noyau de $u$ et l'image de $u$ sont stables par $v$.
Exemples.
Cas de la dimension finie, spectre. $u$ inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $u$.

**Éléments propres d'une matrice carrée** Endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à $A$, valeur propre, vecteur propre, équation aux éléments propres, sous-espace propre. Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme** Lien entre les deux paragraphes précédents. Éléments propres et matrices semblables.

**Polynôme caractéristique** Polynôme caractéristique d'une matrice : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Il est unitaire, de degré $n$, on connaît le coefficient en $X^{n_1}$ et le coefficient constant. Cas d'une matrice triangulaire ou diagonale.
Multiplicité d'une valeur propre. Valeurs propres de $A^\top$.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
Polynôme caractéristique et sous-esapces stables. Si $F$ est stable par $u$, alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$. Pour $\lambda$ valeur propre de $u$, $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$. Cas des valeurs propres simples.

**Diagonalisabilité** Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie. Caractérisation par $\bigoplus E_\lambda(u)$ et $\sum \dim E_\lambda(u)$, par la comparaison de $\dim E_\lambda(u)$ à $m(\lambda)$ dans le cas où $\chi_u$ est scindé. Cas d'un polynôme caractéristique scindé simple.
Diagonalisabilité d'une matrice carrée. Caractérisations. Lien avec les endomorphismes, lien avec la transposée.
Théorème spectral : on admet à ce stade que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

## 250. Polynômes d'endomorphisme, de matrice

**Polynôme d'un endomorphisme** Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, définition de $P(u)$. On dit que $P$ est annulateur de $u$ lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
$P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres, dont l'image est $\mathbb{K}[u]$ et le noyau un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Règles de calcul.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie.
Si $\pi_u$ existe et est de degré $d$, alors $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

**Polynôme d'une matrice carrée** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, définition de $P(A)$. On dit que $P$ est annulateur de $A$ lorsque $P(A) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
$P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres, dont l'image est $\mathbb{K}[A]$ et le noyau un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Règles de calcul.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie.
Si $\pi_A$ existe et est de degré $d$, alors $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

**Lien entre les deux notions** $\mathrm{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P\big(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})\big)$.

## Aux colleurs

Même si ça n'est pas au programme de colle de cette semaine, et si c'est opportun, un étudiant peut utiliser la diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé simple, ou par une considération de polynôme minimal.

## 130. Compléments sur les polynômes

**Aux colleurs** On n'interroge sur ce chapitre qu'après s'être assuré de la bonne maîtrise des chapitres qui précèdent.

**PGCD de deux polynômes** Définition du pgcd de deux polynômes par les idéaux, relation de Bézout, équivalence avec la définition de première année.
Algorithme d'Euclide
Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout.

**Un peu d'arithmétique** Lemme de Gauss et conséquences.

**Polynômes irréductibles, décomposition en facteurs irréductibles** Définition, propriétés, exemples. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$.
Décomposition en facteurs irréductibles.

**Conseil** Il faut savoir exprimer somme et produit des racines d'un polynôme scindé à l'aide des coefficients de ce polynôme.

# Exercices et résultats classiques à connaître

**240.1**

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de $P$ la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $P$ est le polynôme caractéristique de $C$.

(b) On suppose dans cette question que $P$ est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

**240.2**

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $AM - MA$.

(b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$

**240.3**

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E)\ :\ X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice $Y$ commute avec $D$, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation $(E)$.

**240.4**

Dans une espace vectoriel $E$ de dimension finie, on considère deux endomorphismes $u$ et $v$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de $v$ sont stables par $u$.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de $u$ à un sous-espace propre de $v$ est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$ et $v$.

**240.5**

On considère, pour $n \geqslant 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice $J$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

**250.1**

Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
Calculer $P(D)$.

**250.2**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

**130.1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

(a) Déterminer le coefficient dominant et le degré de $P$.

(b) Montrer que les racines complexes de $P$ sont des racines simples.

(c) Préciser le produit et la somme des racines de $P$.

(d) Déterminer explicitement les racines de $P$.

**130.2**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

## Exercices du CCINP à travailler

**0.3** — CCINP 59.13

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que $f$ est bijectif

   (b) en utilisant une matrice de $f$.

3. $f$ est-il diagonalisable ?

**0.4** — CCINP 65.12

Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .

2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ .

   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ :

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

**0.5** 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont des réels.
$M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

**0.6** 68.111

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ est diagonalisable de ~~quatre~~ deux manières :
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où $\mathrm{I}_3$ est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,

**0.7** 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a$ est un réel.

1. Déterminer le rang de $A$.
2. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**0.8** 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où $\mathrm{I}_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de $B$.

**0.9** 72

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où $v$ est un vecteur donné de $E$.

1. Donner le rang de $f$.
2. $f$ est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur $v$)

**0.10** 73

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

**0.11** CCINP **74**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que $A$ est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $A$ puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ où $x, y, z$ désignent trois fonctions de la variable $t$, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

**0.12** CCINP **83**

Soit $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.

1. Soit $\lambda$ un réel non nul. Prouver que si $\lambda$ est valeur propre de $u \circ v$, alors $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes $u$ et $v$ définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$ .
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$ ?

3. Si $E$ est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   **Indication** : penser à utiliser le déterminant.

**0.13** CCINP **91**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A$ n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2. La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de $A$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de $A^n$.

**0.14** CCINP **101.2**

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice $A$ est diagonalisable.

   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de $A$ et déterminer le sous-espace propre associé.

   (c) Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   **Remarque** : le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé.

**0.15** — INP 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\Big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\Big)$.

   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   $a$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $r$ si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$ , $P^{(k)}(a) = 0$.

2. Déterminer deux réels $a$ et $b$ pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

**0.16** — INP 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ , $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P$ vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme $P$, que l'on notera $L_k$, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$ , $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

**0.17** — INP 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient $a_1, a_2, a_3$ trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

   (a) Justifier que $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes $L_1, L_2$ et $L_3$ en fonction de $a_1, a_2$ et $a_3$.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $(L_1, L_2, L_3)$.

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.

   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points $A$, $B$ et $C$.