Aux étudiants

On se présente en colle au point sur les exercices classiques et sur les exercices sélectionnés du cc-INP.

Aux colleurs

Les parties repérées par [*] ne concernent que les étudiants de MPI*, et pas ceux de MPI.

250. Polynômes d'endomorphisme, de matrice

Révision

260. Réduction des endomorphismes et des matrices

Polynômes annulateurs et valeurs propres Si $u(x) = \lambda x$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs. Si E est de dimension finie, les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal.
Traduction matricielle des résultats.

Lemme de décomposition des noyaux Cas de deux polynômes premiers entre eux, de plusieurs polynômes premiers entre eux ; cas d'un polynôme annulateur de u décomposé en facteurs irréductibles.

Polynômes annulateurs et réduction CNS de diagonalisabilité : π_u ou un autre polynôme annulateur est scindé à racine simple.
Si F est stable par u, le polynôme caractéristique (resp. minimal) de l'endomorphisme induit u_F divise celui de u. Si u est diagonalisable, u_F aussi.
Théorème de Cayley-Hamilton.
Traduction matricielle des résultats.

Trigonalisabilité Définition, caractérisation par le fait que χ_u, ou π_u, ou un autre polynôme annulateur scindé. Trace et déterminant losque u est trigonalisable.
Traduction matricielle des résultats.

Nilpotence Définition, indice de nilpotence. Polynôme minimal, caractéristique d'un endomorphisme nilpotent. Dans E de dimension finie, u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour unique valeur propre.
Traduction matricielle des résultats.

Sous-espaces caractéristiques Définition : $N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$. Lorsque χ_u est scindé, lien avec $E_\lambda(u)$, stabilité par u, dimension de $N_\lambda(u)$, polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $u_{N_\lambda(u)}$. Lorsque χ_u est scindé, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$ et il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.
Traduction matricielle des résultats.

650. Intégration sur un intervalle quelconque

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$**.** La continuité par morceaux sur un intervalle quelconque, c'est la continuité par morceaux sur les segments de cet intervalle. Les fonctions continues sont continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées.
L'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si l'intégrale partielle a une limite finie en $+\infty$. Interprétation géométrique. Caractère local de la convergence. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque. Définition de la convergence. L'intégrale est dite faussement généralisée si l'intégrande se prolonge par continuité.
Dans le cas d'une fonction positive, on autorise l'écriture $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, un calcul aboutissant à un résultat fini valant preuve de la convergence de l'intégrale.
Exemples de références : $\int^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\int_{\to 0} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_{\to 0} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, le reste d'une intégrale convergente tend vers 0.
Techniques de calcul : calcul par primitivation, changement de variable, intégration par parties. Ces théorèmes sont aussi utilisés pour justifier la convergence des intégrales.

Convergence absolue, intégrabilité Convergence absolue, inégalité triangulaire. Intégrabilité d'une fonction : un fonction est dite intégrable sur I si elle est continue par morceaux sur I, et d'intégrale absolument convergente sur I.
Exemples de référence.
Techniques d'étude par comparaison : majoration de la valeur absolue/module, domination, négligeabilité, équivalent.
Intégrale nulle d'une fonction continue et positive.

Exercices et résultats classiques à connaître

650.1

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

650.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire I_n.

650.3

(a) Démontrer la convergence de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(b) [*] Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$.

(c) [*] La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

(d) [*] Démontrer que l'intégrale définissant I converge tout en établissant l'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

650.4

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$.

650.5

[*] Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

650.6

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

650.7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

Exercices du CCINP à travailler

0.8 CCINP 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

0.9 **28**

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

0.10 **29.12**

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.