240. Diagonalisation

Révision

250. Polynômes d'endomorphisme, de matrice

Révision

260. Réduction des endomorphismes et des matrices

Polynômes annulateurs et valeurs propres Si $u(x) = \lambda x$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs. Si E est de dimension finie, les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal.
Traduction matricielle des résultats.

Lemme de décomposition des noyaux Cas de deux polynômes premiers entre eux, de plusieurs polynômes premiers entre eux ; cas d'un polynôme annulateur de u décomposé en facteurs irréductibles.

Polynômes annulateurs et réduction CNS de diagonalisabilité : π_u ou un autre polynôme annulateur est scindé à racine simple.
Si F est stable par u, le polynôme caractéristique (resp. minimal) de l'endomorphisme induit u_F divise celui de u. Si u est diagonalisable, u_F aussi.
Théorème de Cayley-Hamilton.
Traduction matricielle des résultats.

Trigonalisabilité Définition, caractérisation par le fait que χ_u, ou π_u, ou un autre polynôme annulateur scindé. Trace et déterminant losque u est trigonalisable.
Traduction matricielle des résultats.

Nilpotence Définition, indice de nilpotence. Polynôme minimal, caractéristique d'un endomorphisme nilpotent. Dans E de dimension finie, u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour unique valeur propre.
Traduction matricielle des résultats.

Sous-espaces caractéristiques Définition : $N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$. Lorsque χ_u est scindé, lien avec $E_\lambda(u)$, stabilité par u, dimension de $N_\lambda(u)$, polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $u_{N_\lambda(u)}$. Lorsque χ_u est scindé, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$ et il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.
Traduction matricielle des résultats.

630. Dérivation des fonctions numériques

Rappels de première année : définition, caractéristation de la dérivation, équation d'une tangente, dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
Extremum global, local, point critique, théorème de Rolle.
Égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
Opérations sur les fonctions dérivables.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Leibniz.
Théorème limite de la dérivée. Exemple de fonction dérivable, qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

640. Intégration sur un segment des fonctions numériques

Rappels de première année : subdivision d'un segment, fonction continue par morceaux sur un segment. Intégrale d'une fonction cpm sur un segment, relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, intégrale nulle d'une fonction **continue** et positive.
Sommes de Riemann.
Primitives d'une fonction. L'intégrale fonction de la borne d'en haut d'une fonction continue est une primitive.
Intégration par parties (pour l'utilisation pratique sur des fonctions usuelles, on ne précise pas les hypothèses de régularité). Changement de variable (pour l'utilisation pratique sur des fonctions usuelles, on ne précise pas les hypothèses de régularité).
Formules de Taylor.

650. Intégration sur un intervalle quelconque

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$. La continuité par morceaux sur un intervalle quelconque, c'est la continuité par morceaux sur les segments de cet intervalle. Les fonctions continues sont continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si l'intégrale partielle a une limite finie en $+\infty$. Interprétation géométrique. Caractère local de la convergence. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque. Définition de la convergence. L'intégrale est dite faussement généralisée si l'intégrande se prolonge par continuité.
Dans le cas d'une fonction positive, on autorise l'écriture $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, un calcul aboutissant à un résultat fini valant preuve de la convergence de l'intégrale.
Exemples de références : $\displaystyle\int^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{\to 0} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{\to 0} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, le reste d'une intégrale convergente tend vers 0.
Techniques de calcul : calcul par primitivation, changement de variable, intégration par parties. Ces théorèmes sont aussi utilisés pour justifier la convergence des intégrales.

Convergence absolue, intégrabilité Convergence absolue, inégalité triangulaire. Intégrabilité d'une fonction : un fonction est dite intégrable sur I si elle est continue par morceaux sur I, et d'intégrale absolument convergente sur I.
Exemples de référence.
Techniques d'étude par comparaison : majoration de la valeur absolue/module, domination, négligeabilité, équivalent.
Intégrale nulle d'une fonction continue et positive.

Exercices et résultats classiques à connaître

260.1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^2 - M^\top = I_n$$

Montrer que M est diagonalisable.

260.2

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante, où $n \geqslant 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) On souhaite dans cette question déterminer les valeurs propres de A.

a1. Quel est le rang de A ?

a2. Calculer A^2.

a3. Justifier que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-2$.

a4. En notant λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres (éventuellement nulle, égales, complexes), donner $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$.

a5. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$.

(b) Déterminer une CNS pour avoir $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{Z}$.

(c) Démontrer que, pour tout $k \geqslant 3$, il existe λ_k, μ_k tels que :

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k A^2$$

260.3

Soit E un espace vectoriel réel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

260.4

(a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5 + \lambda}{2(x-1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x+1)}\right) y$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

630.1

(a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $\geqslant 2$, scindé à racines simples, alors P' est aussi scindé à racines simples.

(b) Le résultat est-il vrai si on suppose $P \in \mathbb{C}[X]$?

(c) **[*]** Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme scindé, alors P' est aussi scindé.

630.2

Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f\ :\ x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

640.1

Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

640.2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(b) Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles.

640.3

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$$

640.4

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

650.1

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

650.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire I_n.

650.3

(a) Démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(b) **[*]** Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$.

(c) **[*]** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

(d) **[*]** Démontrer que l'intégrale définissant I converge tout en établissant l'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

650.4

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

650.5

[*] Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x$.

650.6

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

650.7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

Exercices du CCINP à travailler

0.8 CCINP 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

0.9 CCINP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

0.10 CCINP 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

0.11 CCINP 29.12

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in \,]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

$\boxed{0.12}$ CCINP 79.1

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

$\boxed{0.13}$ CCINP 62.21

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$:

   (a) en utilisant le lemme des noyaux.

$\boxed{0.14}$ CCINP 65.3

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4+2X^3+X^2-4X$ est un polynôme annulateur de A.

$\boxed{0.15}$ CCINP 68.14

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable ~~de quatre manières :~~

   (d) en calculant A^2.

$\boxed{0.16}$ CCINP 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

$\boxed{0.17}$ CCINP 88

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E,\ u(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$.

   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier sa réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

$\boxed{\textbf{0.18}}$ **INP 93.23**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{Id})$.

3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.