650. Intégration sur un intervalle quelconque

Révision

531. Intégration des suites de fonctions — convergence dominée

Interversion limite-intégrale, cas de la convergence uniforme sur un segment.
Interversion limite-intégrale, convergence dominée.

541. Intégration des séries de fonctions — interversion série-intégrale

Intégration terme à terme, cas de la convergence uniforme sur un segment.
Interversion série-intégrale, cas d'une série positive : on calcule dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$.
Interversion série-intégrale, cas général : on vérifie la convergence de la série $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$.
Interversion série-intégrale, utilisation de la convergence dominée.

660. Intégrales à paramètre

Continuité des intégrales à paramètre. Pour les applications pratiques, on ne vérifie pas la continuité par morceaux en la variable d'intégration. Domination locale.
Limite des intégrales à paramètre : convergence dominée à paramètre continu.
Classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. Domination locale.
Classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre. Domination locale.

Exercices et résultats classiques à connaître

531.1

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt + t^2} \, \mathrm{d}t$$

531.2

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

531.3

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, \mathrm{d}x$$

541.1

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

541.2

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

660.1

Montrer que $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

660.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

660.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

(d) **[*]** Démontrer que f est continue en 0.

660.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(t)\mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

660.5

Pour f continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \ : \ s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t^k) \qquad (H)$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $F(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall s>0,\ F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Exercices du CCINP à travailler

0.6 CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

0.7 CCINP 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

0.8 CCINP 26

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

0.9 CCINP 27

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a\in\,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0.10 CCINP 29

On pose : $\forall\,x\in]0,+\infty[,\ \forall\,t\in\,]0,+\infty[,\ f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\,x\in\,]0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\,x\in]0,+\infty[,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

0.11 CCINP 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f:x\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .

0.12 CCINP 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,+\infty[\,,\ f_n(t)=\dfrac{a_nt^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

(b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

0.13 INP 50

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.