66 Intégration sur un intervalle quelconque

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$. La continuité par morceaux sur un intervalle quelconque, c'est la continuité par morceaux sur les segments de cet intervalle. Les fonctions continues sont continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si l'intégrale partielle a une limite finie en $+\infty$. Interprétation géométrique. Caractère local de la convergence. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque. Définition de la convergence. L'intégrale est dite faussement généralisée si l'intégrande se prolonge par continuité.
Dans le cas d'une fonction positive, on autorise l'écriture $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, un calcul aboutissant à un résultat fini valant preuve de la convergence de l'intégrale.
Exemples de références : $\displaystyle\int^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{\to 0} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{\to 0} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, le reste d'une intégrale convergente tend vers 0.
Techniques de calcul : calcul par primitivation, changement de variable, intégration par parties. Ces théorèmes sont aussi utilisés pour justifier la convergence des intégrales.

Convergence absolue, intégrabilité Convergence absolue, inégalité triangulaire. Intégrabilité d'une fonction : un fonction est dite intégrable sur I si elle est continue par morceaux sur I, et d'intégrale absolument convergente sur I.
Exemples de référence.
Techniques d'étude par comparaison : majoration de la valeur absolue/module, domination, négligeabilité, équivalent.
Intégrale nulle d'une fonction continue et positive.

53 Suites de fonctions numériques - convergence dominée

Révision du début du chapitre, modes de convergence.
Interversion limite-intégrale, cas de la convergence uniforme sur un segment.
Interversion limite-intégrale, convergence dominée.

54 Séries de fonctions numériques - interversion $\Sigma/\int$

Révision du début du chapitre, modes de convergence.
Intégration terme à terme, cas de la convergence uniforme sur un segment.
Interversion série-intégrale, cas d'une série positive : on calcule dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
Interversion série-intégrale, cas général : on vérifie la convergence de la série $\displaystyle\sum \left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \right)$.
Interversion série-intégrale, utilisation de la convergence dominée.

Exercices et résultats classiques à connaître

$\boxed{\textbf{66.1}}$

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

66.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire I_n.

66.3

Uniquement MPI*
Dans ce sujet, on étudie la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$.

(b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

(c) Démontrer que l'intégrale définissant I converge tout en établissant l'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

66.3

Démontrer la la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

66.4

Uniquement MPI*
Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x$.

66.4

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

66.5

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

66.6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

53.1

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt + t^2} \, \mathrm{d}t$$

53.2

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

53.3

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, \mathrm{d}x$$

54.1

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

54.2

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

Exercices du CCINP à travailler

0.3 CCINP 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

0.4 **29.12**

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

0.5 **25**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

0.6 **26**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

0.7 **27**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.