Devoir maison n°4

À rendre le lundi 06/11

⋆⋆⋆

Minimisation d'automate

Après la construction d'un automate, il est naturel de s'interroger sur la minimalité du nombre d'états. En effet, une fois l'automate construit, son exploitation et l'espace mémoire utilisé seront meilleurs s'il possède peu d'états.

Un résultat intéressant est que l'automate minimal d'un langage reconnaissable est unique, à permutation des états près. Cela permet notamment de tester l'équivalence de deux automates (c'est-à-dire l'égalité de leur langage reconnu).

On propose dans ce devoir d'étudier deux méthodes de minimisation d'automate.

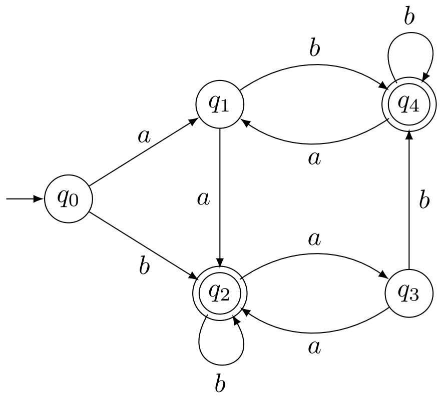
Vous indiquerez en début de copie le numéro de la partie dont vous souhaitez la correction.

1 Algorithme de Brzozowski

1.1 Langage miroir

Pour $u = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$, on note $\overline{u}$ le **mot miroir** de u, défini par $\overline{u} = a_n a_{n-1} \ldots a_1$. Pour $L \subseteq \Sigma^*$ un langage, on note $\overline{L} = \{\overline{u} \mid u \in L\}$ le **langage miroir** de L.

On considère l'automate A_0 :



Automate A_0

Question 1 Déterminer le langage reconnu par l'automate A_0. On prouvera rigoureusement le résultat.

Question 2 Représenter graphiquement un automate non déterministe, qu'on notera $\overline{A_0}$, reconnaissant le langage miroir de $L(A_0)$.

Question 3 Montrer que si L est un langage rationnel, alors $\overline{L}$ est un langage rationnel. On détaillera la construction d'un automate non déterministe, noté $\overline{A}$, reconnaissant le langage miroir d'un automate A donné.

1.2 Déterminisation

Pour la suite, si A est un automate non déterministe, on note $\det(A)$ l'automate des parties de A où on n'a conservé que les états accessibles.

Question 4 Construire l'automate $A_1 = \det(\overline{A_0})$. On donnera la table de transition obtenue pendant la construction, et on représentera graphiquement l'automate ainsi obtenu.

Question 5 Représenter graphiquement un automate non déterministe, qu'on notera $\overline{A_1}$, reconnaissant le langage miroir de $L(A_1)$.

Question 6 Construire l'automate $A_2 = \det(\overline{A_1})$. Quel est le langage reconnu par A_2 ?

1.3 Algorithme de Brzozowski

L'algorithme de Brzozowski consiste, pour un automate A, à calculer l'automate $B = \det(\overline{\det(\overline{A})})$. On veut montrer dans cette partie que $L(B) = L(A)$ et que B contient un nombre minimal d'état parmi les automates déterministes complets équivalents à A.

Question 7 Avec les notations précédentes, montrer que $L(B) = L(A)$.

Pour la suite, on suppose que A est un automate déterministe dont tous les états sont accessibles. On pose $\overline{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ et on pose $\det(\overline{A}) = (X, \Sigma, \delta, I, F')$ le déterminisé accessible de $\overline{A}$.

Pour $u \in \Sigma^*$ et $L \subseteq \Sigma^*$, on note $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$.

Question 8 Soit $q \in Q$ et $u \in \Sigma^*$. Montrer que si $q \in \delta^*(I, u)$, alors $u^{-1}L(\overline{A}) \neq \emptyset$.

Question 9 Montrer que si $u, v \in \Sigma^*$ vérifient $u^{-1}L(\overline{A}) = v^{-1}L(\overline{A})$, alors $\delta^*(I, u) = \delta^*(I, v)$.

Question 10 En déduire que tout automate déterministe complet reconnaissant $L(\overline{A})$ possède au moins $|X|$ états.

Question 11 Montrer la correction de l'algorithme de Brzozowski.

Question 12 Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme en fonction du nombre d'états de l'automate initial ? Est-il utilisable en pratique ? Justifier.

2 Algorithme de Hopcroft

2.1 Équivalence de Nerode

Définition

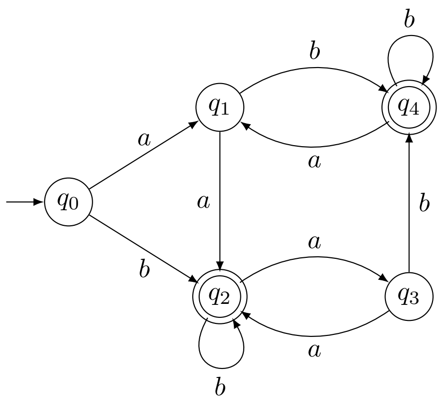
Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD, et $p, q \in Q$ deux états. On dit que p et q sont **équivalents** si et seulement si pour tout $u \in \Sigma^*$:

$$\delta^*(p, u) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, u) \in F$$

On notera $p \sim_A q$ ou $p \sim q$ s'il n'y a pas d'ambiguïté de l'automate.

On dit que p et q sont **séparables** s'ils ne sont pas équivalents. Si $(\delta^*(p, u), \delta^*(q, u)) \in F \times \overline{F} \cup \overline{F} \times F$, on dit que u **sépare** p et q.

On considère à nouveau l'automate A_0 :



Automate A_0

Question 13 Parmi les paires de sommets $\{q_1, q_4\}, \{q_0, q_1\}, \{q_2, q_4\}$, préciser lesquelles sont séparables ou équivalentes. On donnera un mot u qui les sépare pour une paire séparable, et une justification rapide de leur équivalence pour une paire équivalente.

Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD, $q \in Q$ et $a \in \Sigma$. On note $a^{-1}q = \{p \in Q, \delta(p, a) = q\}$. Par exemple, dans l'automate A_0 précédent, $b^{-1}q_4 = \{q_1, q_3, q_4\}$.

Question 14 On suppose que A est complet. Montrer que pour $a \in \Sigma$, $\sum\limits_{q \in Q} |a^{-1}q| = |Q|$.

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : AFD complet $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
Début algorithme
- $\Phi \leftarrow$ file vide
- $D \leftarrow \varnothing$
- **Pour** $(p, q) \in F \times \overline{F}$ **Faire**
  - Insérer (p, q) à Φ
  - $D \leftarrow D \cup \{(p, q), (q, p)\}$
- **Tant que** $\Phi \neq \varnothing$ **Faire**
  - $(p, q) \leftarrow$ extraction de Φ
  - **Pour** $a \in \Sigma$ **Faire**
    - **Pour** $(p', q') \in a^{-1}p \times a^{-1}q$ **Faire**
      - **Si** $(p', q') \notin D$ **Alors**
        - Insérer (p', q') à Φ
        - $D \leftarrow D \cup \{(p', q'), (q', p')\}$
- **Renvoyer** D

Question 15 Appliquer l'algorithme à l'automate de l'exemple précédent. On utilisera un tableau à double entrée pour représenter D.

Question 16 Montrer qu'après l'exécution de l'algorithme, $(p, q) \in D$ si et seulement si (p, q) est séparable.

Question 17 Déterminer la complexité de l'algorithme en fonction de $|\Sigma|$ et $|Q|$.

2.2 Automate minimal

L'objectif de la construction de l'automate minimal est de pouvoir « fusionner » des états qui se comportent de la même manière. Pour simplifier la construction, on ne cherche à minimiser dans ce problème que des automates fini déterministes complets.

Question 18 Soient $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ et $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ deux AFD. On considère l'automate $C = (Q_A \cup Q_B, \Sigma, \delta, q_A, F_A \cup F_B)$ où δ est définie par $\delta_{|Q_A} = \delta_A$ et $\delta_{|Q_B} = \delta_B$. Autrement dit, l'automate C est l'automate où on a superposé les deux automates A et B. Montrer que A et B sont équivalents si et seulement si $q_A \sim_C q_B$.

Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet. L'algorithme de minimisation est le suivant.

- on construit A' en enlevant de A les états non accessibles ;
- on utilise l'algorithme de séparation sur A' pour obtenir une partition de Q en classes d'équivalences Q_0, Q_1, ..., Q_k.

On construit un automate intermédiaire $B' = (Q_B, \Sigma, \delta_B, Q_0, F_B)$ tel que, en notant $\overline{q}$ la classe d'équivalence de $q \in Q$:

- $Q_B = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k\}$;
- $Q_0 = \overline{q_0}$;
- $F_B = \{\overline{q} \mid q \in F\}$;
- $\forall i \in [\![0, k]\!], \forall a \in \Sigma,\ \delta_B(Q_i, a) = \overline{\delta(q, a)}$, où $q \in Q_i$.

Dès lors, l'automate minimal de A est l'automate B correspondant à B' dans lequel on a supprimé l'éventuel (unique) état non co-accessible.

Question 19 Montrer que δ_B est bien définie.

Question 20 Montrer qu'avant son éventuelle suppression, il y a au plus un état non co-accessible.

Question 21 Montrer que A et B sont équivalents.

Question 22 Montrer que si $C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$ est un AFD équivalent à A, alors $|Q_C| \geqslant |Q_B|$.

Question 23 Déterminer l'automate minimal de l'automate A_0.

Question 24 Déterminer l'automate minimal de l'automate A_3 suivant :