Algorithmes d'approximation et Branch and Bound

Quentin Fortier

December 10, 2024

Problème d'optimisation

Définition

On appelle problème d'optimisation est un triplet (I, S, f) avec I un ensemble d'instances, $S \subset I$ un ensemble de solutions et f une fonction objectif à optimiser (minimiser ou maximiser).
Un algorithme A résout ce problème d'optimisation si pour toute instance $i \in I$, $A(i)$ renvoie une solution $s \in S$ telle que $f(s)$ est optimum.

Problème d'optimisation

Exemple :

STABLE (optimisation)

Instance : un graphe G
Solution : un ensemble stable de G (ensemble de sommets sans arêtes entre eux)
Optimisation : maximiser la taille de l'ensemble stable

Un problème d'optimisation peut être transformé en un problème de décision :

STABLE (décision)

Instance : un graphe G et un entier k
Question : G contient-il un ensemble stable de taille k ?

Algorithme d'approximation

On ne sait pas résoudre un problème NP-complet en complexité polynomiale.
À la place, on peut chercher un algorithme d'approximation :

Algorithme d'approximation

On ne sait pas résoudre un problème NP-complet en complexité polynomiale.
À la place, on peut chercher un algorithme d'approximation :

Définition

Soit $\Pi = (I, S, f)$ un problème d'optimisation.
On dit qu'un algorithme A est une α-approximation de Π si pour toute instance x de Π :

- $A(x)$ termine et renvoie une solution $s \in S$
- si Π est un problème de maximisation : $f(s) \geq \alpha \cdot f(s^*)$
- si Π est un problème de minimisation : $f(s) \leq \alpha \cdot f(s^*)$

où s^* est une solution optimale de Π.

Exemple : Une 2-approximation d'un problème de minimisation doit renvoyer une solution dont la valeur est au plus deux fois plus grande que la solution optimale.

Algorithme d'approximation

Exercice

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une couverture par sommets de G est un ensemble $S' \subset S$ tel que pour toute arête $\{u, v\} \in A$, $u \in S'$ ou $v \in S'$.

VERTEX-COVER

Instance : un graphe G et un entier k
Question : G contient-il une couverture par sommets de taille k ?

1. On admet que CLIQUE est NP-complet. Montrer que VERTEX-COVER est NP-complet.

Algorithme d'approximation

Exercice

3. On appelle VERTEX-COVER-OPT le problème d'optimisation associé à VERTEX-COVER.
   Montrer que l'algorithme suivant n'est pas une α-approximation de VERTEX-COVER-OPT, quel que soit α :

$S' \leftarrow \emptyset$
Tant que $A \neq \emptyset$ **:**
    Choisir $\{u, v\} \in A$
    $S' \leftarrow S' \cup \{u\}$
    Retirer de A toutes les arêtes incidentes à u ou v
Renvoyer S'

Algorithme d'approximation

Exercice

4. Montrer que l'algorithme suivant est une 2-approximation de VERTEX-COVER-OPT :

$S' \leftarrow \emptyset$
Tant que $A \neq \emptyset$ **:**
    Choisir $\{u, v\} \in A$
    $S' \leftarrow S' \cup \{u, v\}$
    Retirer de A toutes les arêtes incidentes à u ou v
Renvoyer S'

5. Avec quelle complexité peut-on implémenter cet algorithme ?

Algorithme d'approximation

Exercice

COUPLAGE-POIDS-MAX

Instance : un graphe $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$
Solution : un couplage C de G
Optimisation : maximiser $f(C) = \sum_{\{u,v\} \in C} p(\{u, v\})$

Montrer que l'algorithme suivant est une 2-approximation de COUPLAGE-POIDS-MAX :

$C \leftarrow \emptyset$
Pour $a \in A$ par ordre décroissant de poids **:**
  Si $C \cup \{a\}$ est un couplage **:**
    $C \leftarrow C \cup \{a\}$
Renvoyer C

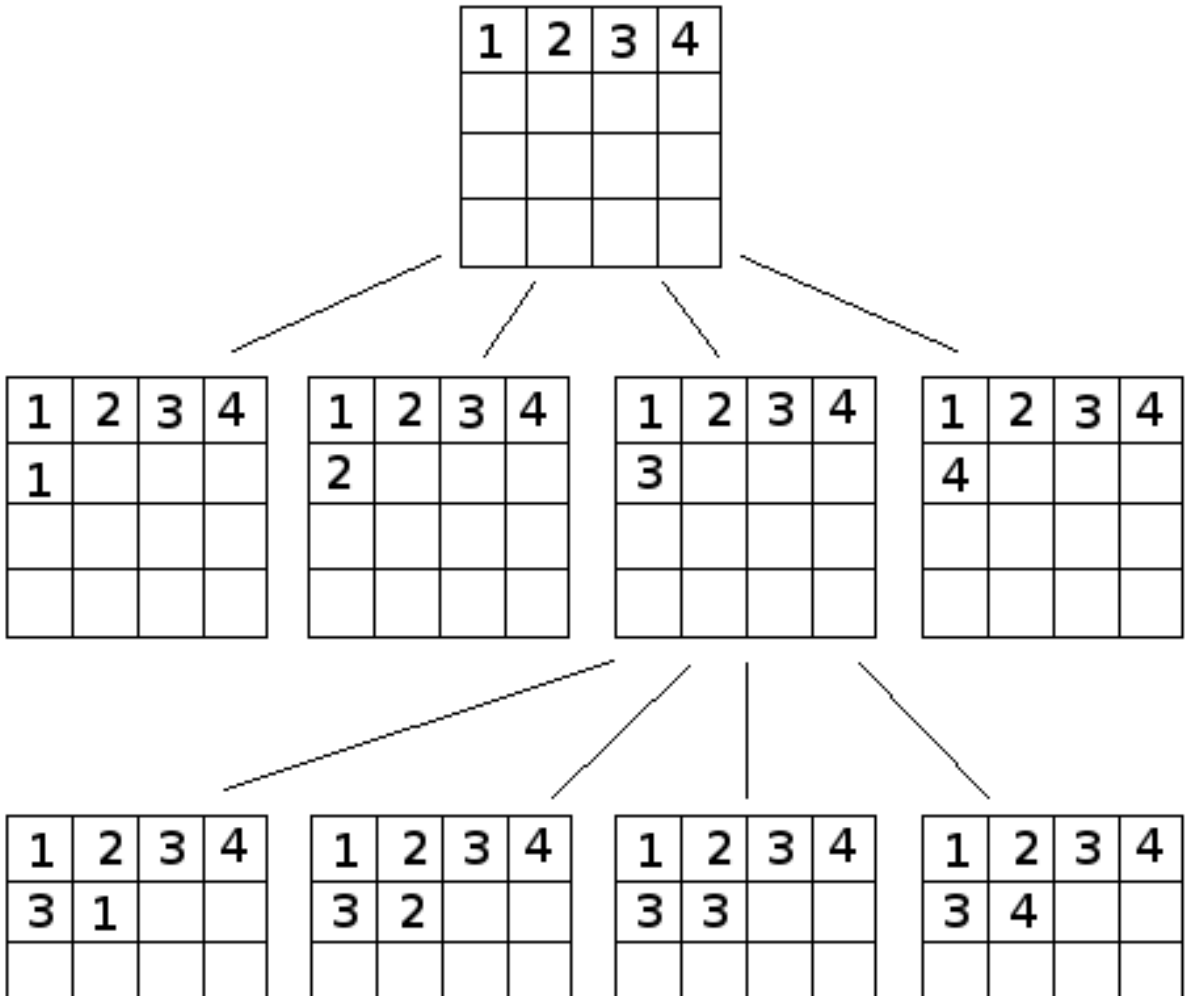
Branch and Bound

Définition

Un algorithme par backtracking (retour sur trace) construit une solution petit à petit, en revenant en arrière s'il n'est pas possible de l'étendre en une solution complète.

Branch and Bound

Un backtracking revient à faire un parcours en profondeur sur l'arbre des solutions partielles, en passant à une branche suivante lorsqu'il n'est pas possible d'étendre une solution partielle :



Branch and Bound

Exemple : L'algorithme de Quine est un algorithme de backtracking pour trouver une valuation satisfaisant une formule logique φ :

1. Choisir une variable x restante dans φ.
2. Tester récursivement si $\varphi[x \leftarrow 1]$ est satisfiable.
3. Si non, tester récursivement si $\varphi[x \leftarrow 0]$ est satisfiable.

Branch and Bound

Exemple : L'algorithme de Quine est un algorithme de backtracking pour trouver une valuation satisfaisant une formule logique φ :

1. Choisir une variable x restante dans φ.
2. Tester récursivement si $\varphi[x \leftarrow 1]$ est satisfiable.
3. Si non, tester récursivement si $\varphi[x \leftarrow 0]$ est satisfiable.

L'algorithme simplifie la formule à chaque assignation de variable, ce qui peut permettre de couper des branches (si la formule est insatisfiable). Cet algorithme est donc souvent plus efficace que la recherche exhaustive, même s'il reste en complexité exponentielle dans le pire cas.

Branch and Bound

Soit $\Pi = (I, S, f)$ un problème de maximisation.

Définition

Un algorithme par Branch and Bound (séparation et évaluation) permet d'accélérer la résolution par backtracking de Π en utilisant une heuristique h que si x est une solution partielle qui peut être étendue en une solution $y \in S$ alors $f(y) \leq h(x)$.
L'algorithme conserve la meilleure solution trouvée s^* et explore un sous-arbre x que si $h(x) \geq f(s^*)$.

Branch and Bound

Soit $\Pi = (I, S, f)$ un problème de maximisation.

Définition

Un algorithme par Branch and Bound (séparation et évaluation) permet d'accélérer la résolution par backtracking de Π en utilisant une heuristique h que si x est une solution partielle qui peut être étendue en une solution $y \in S$ alors $f(y) \leq h(x)$.
L'algorithme conserve la meilleure solution trouvée s^* et explore un sous-arbre x que si $h(x) \geq f(s^*)$.

Remarques :

- Le principe est le même pour un problème de minimisation en inversant les inégalités.
- On obtient une solution exacte (contrairement à un algorithme d'approximation) mais la complexité peut être exponentielle.

Branch and Bound : Sac à dos

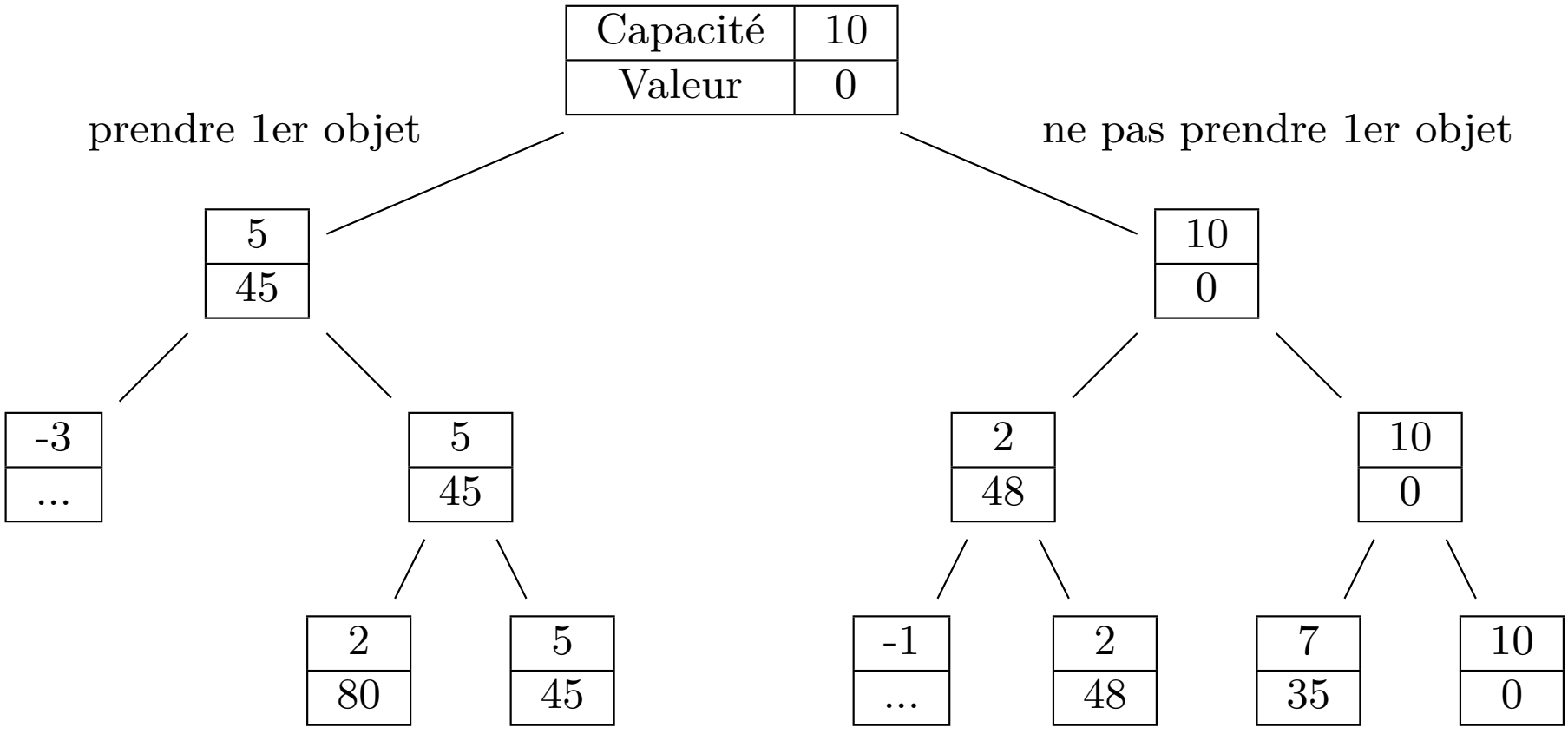
SAC-A-DOS

Instance : un ensemble d'objets de poids $p_1, \ldots, p_n$ et de valeurs $v_1, \ldots, v_n$ et une capacité P.
Solution : un sous-ensemble d'objets de poids total inférieur à P.
Optimisation : maximiser la valeur totale des objets.

On peut montrer que le problème de décision associé est NP-complet.

Branch and Bound : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Arbre des solutions partielles

Branch and Bound : Sac à dos

Heuristique possible : valeur totale des objets restants.

Branch and Bound : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

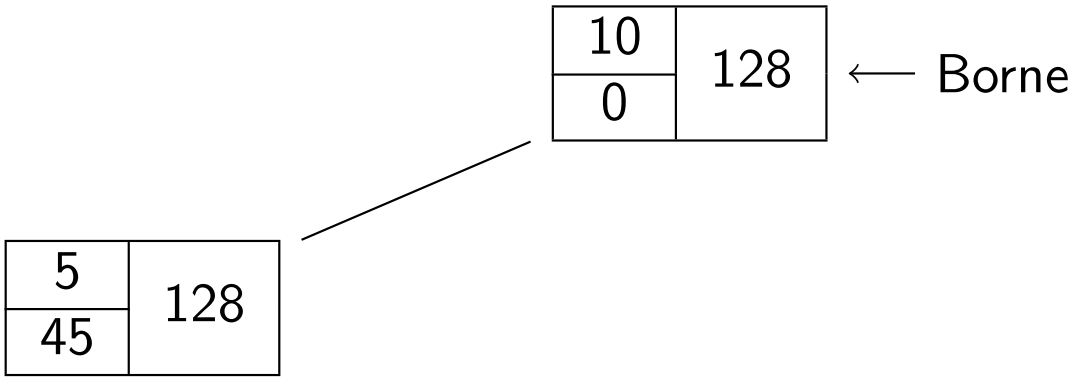
10	128
0	

$\longleftarrow$ Borne

Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

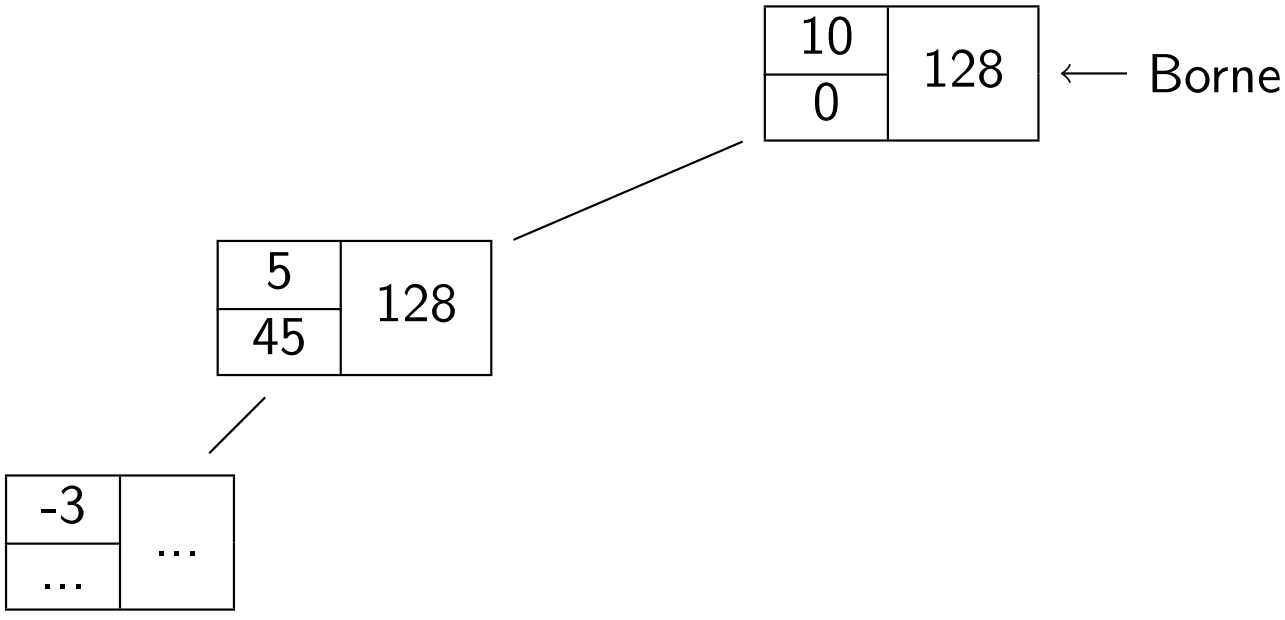
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

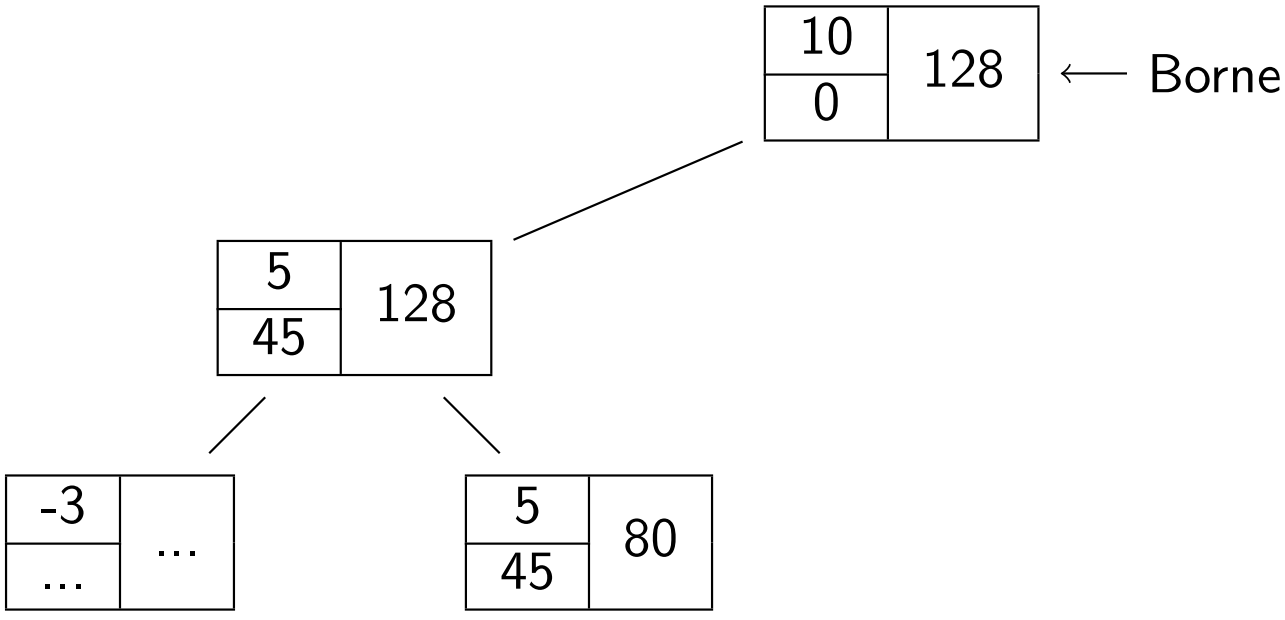
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

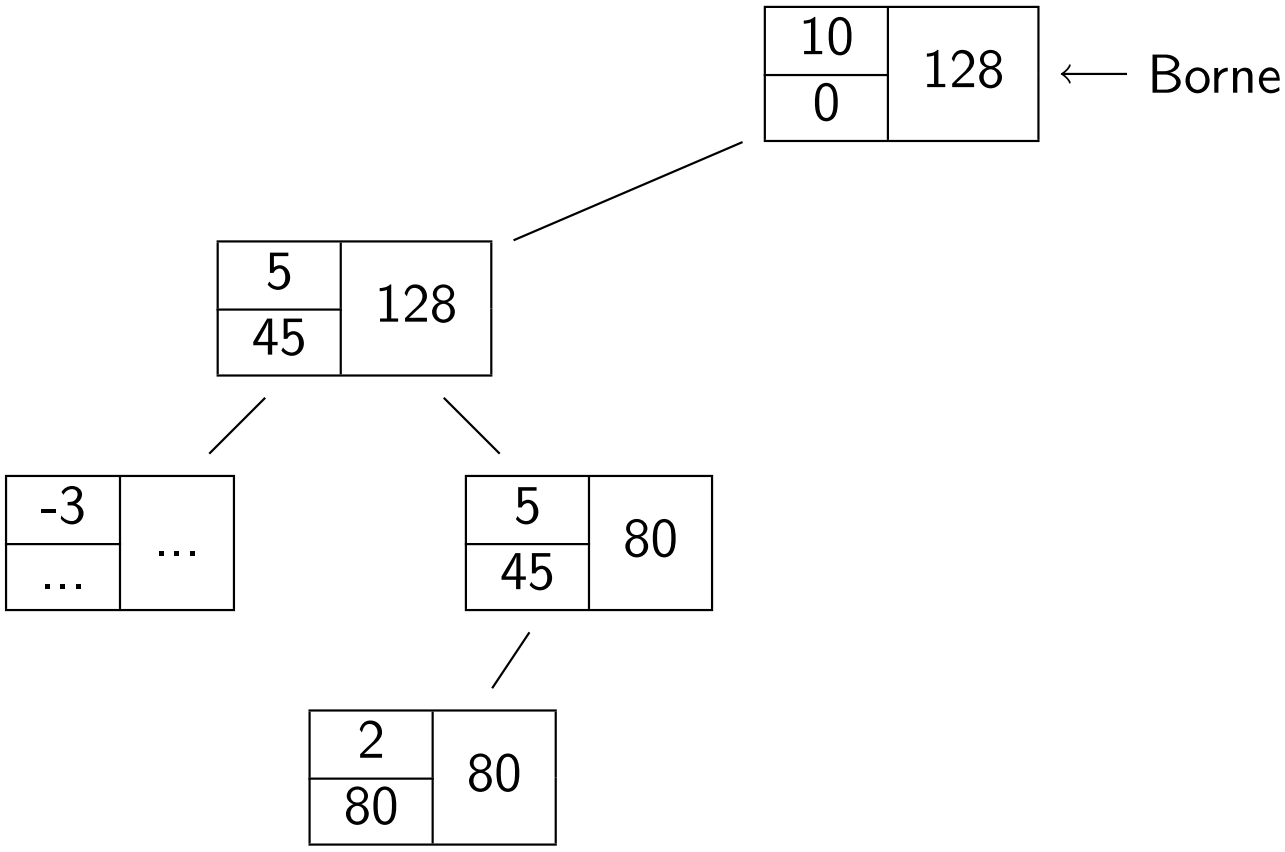
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

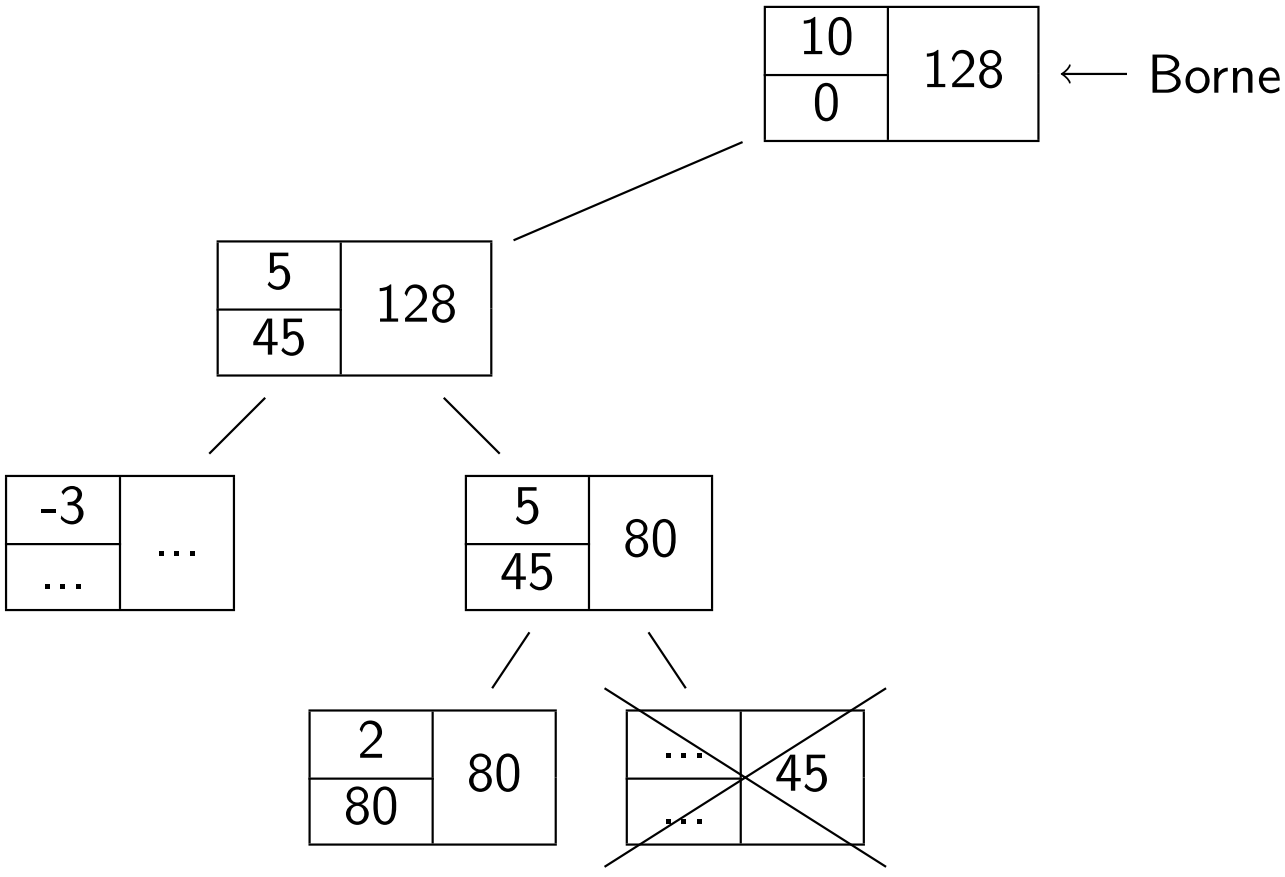
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

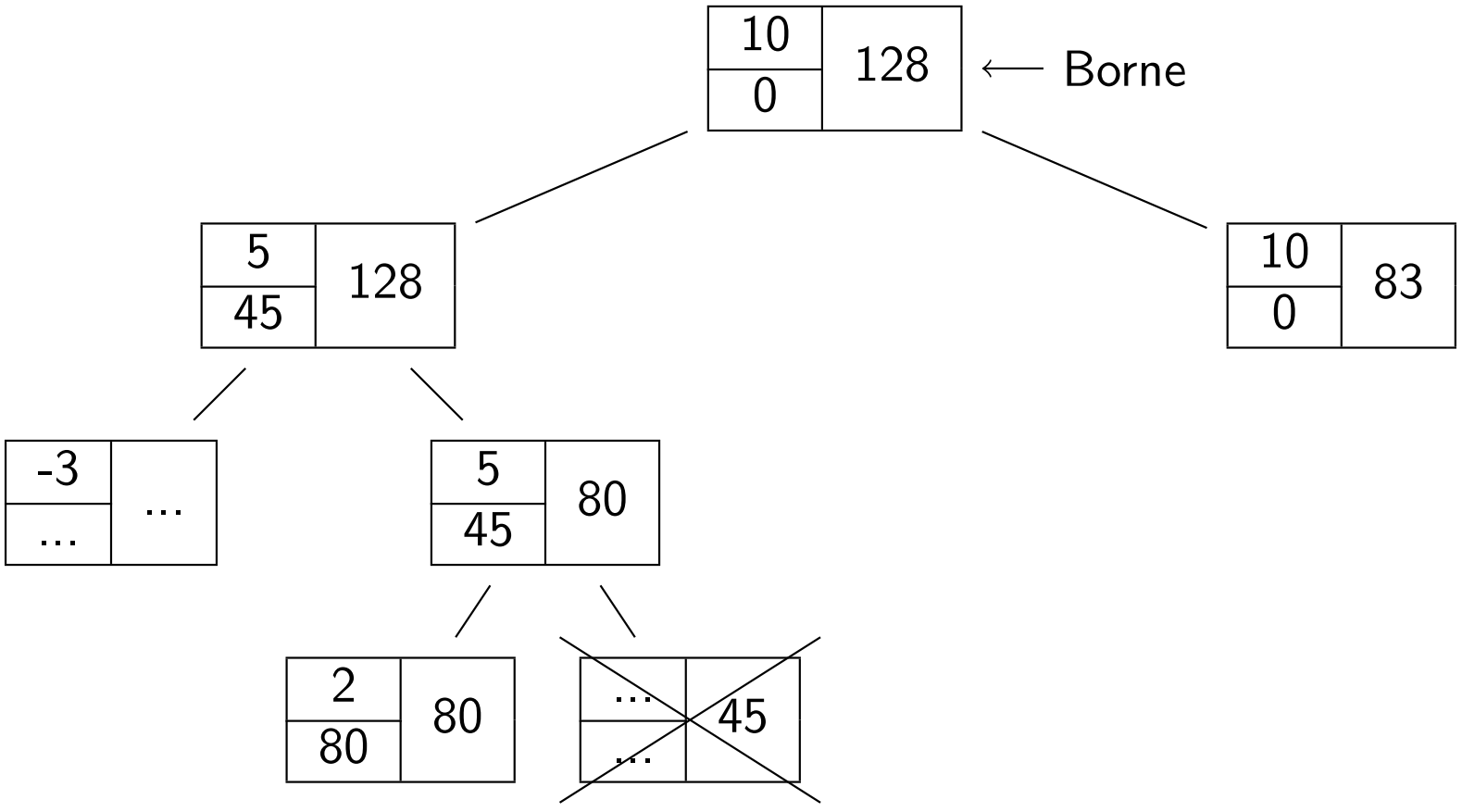
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

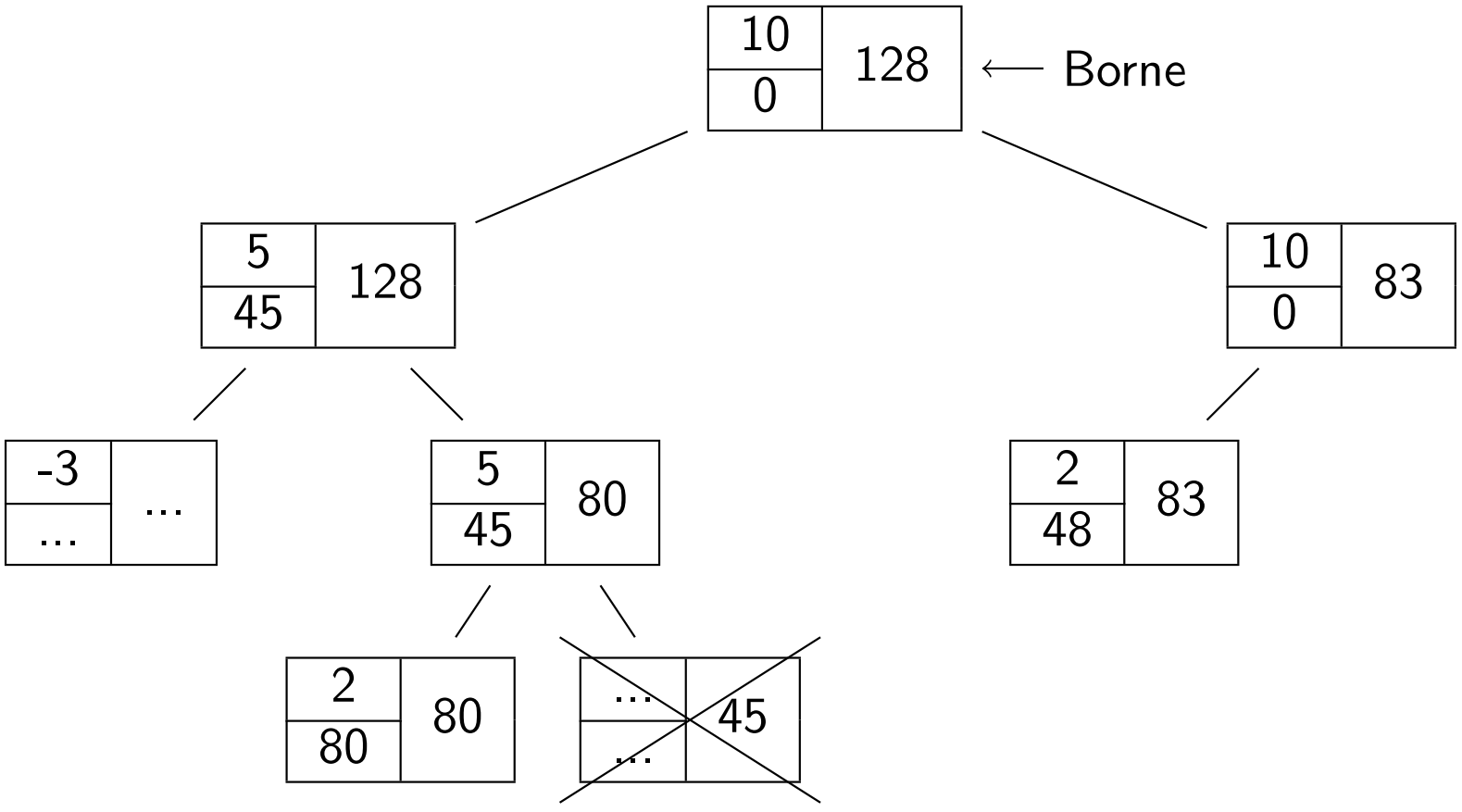
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

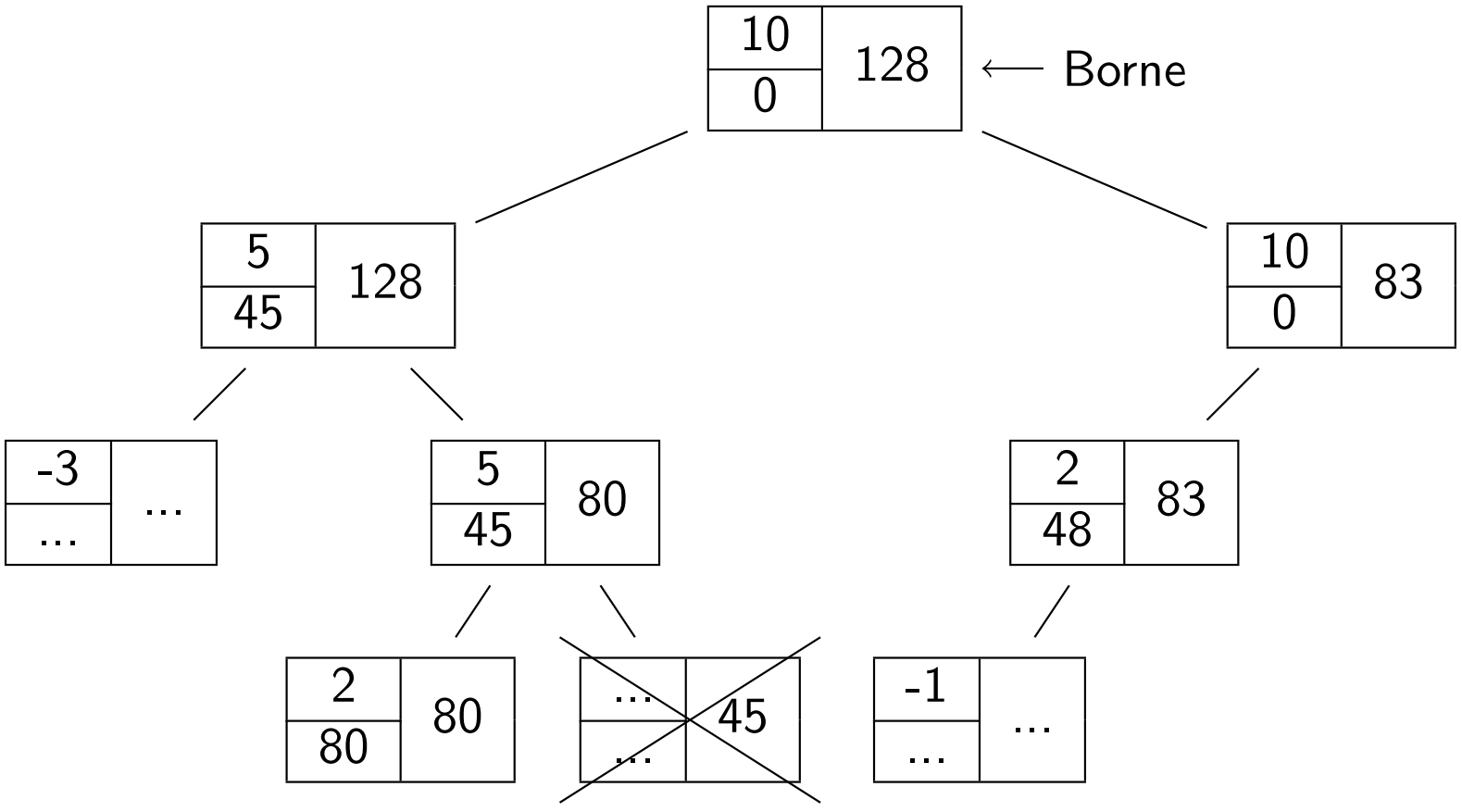
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

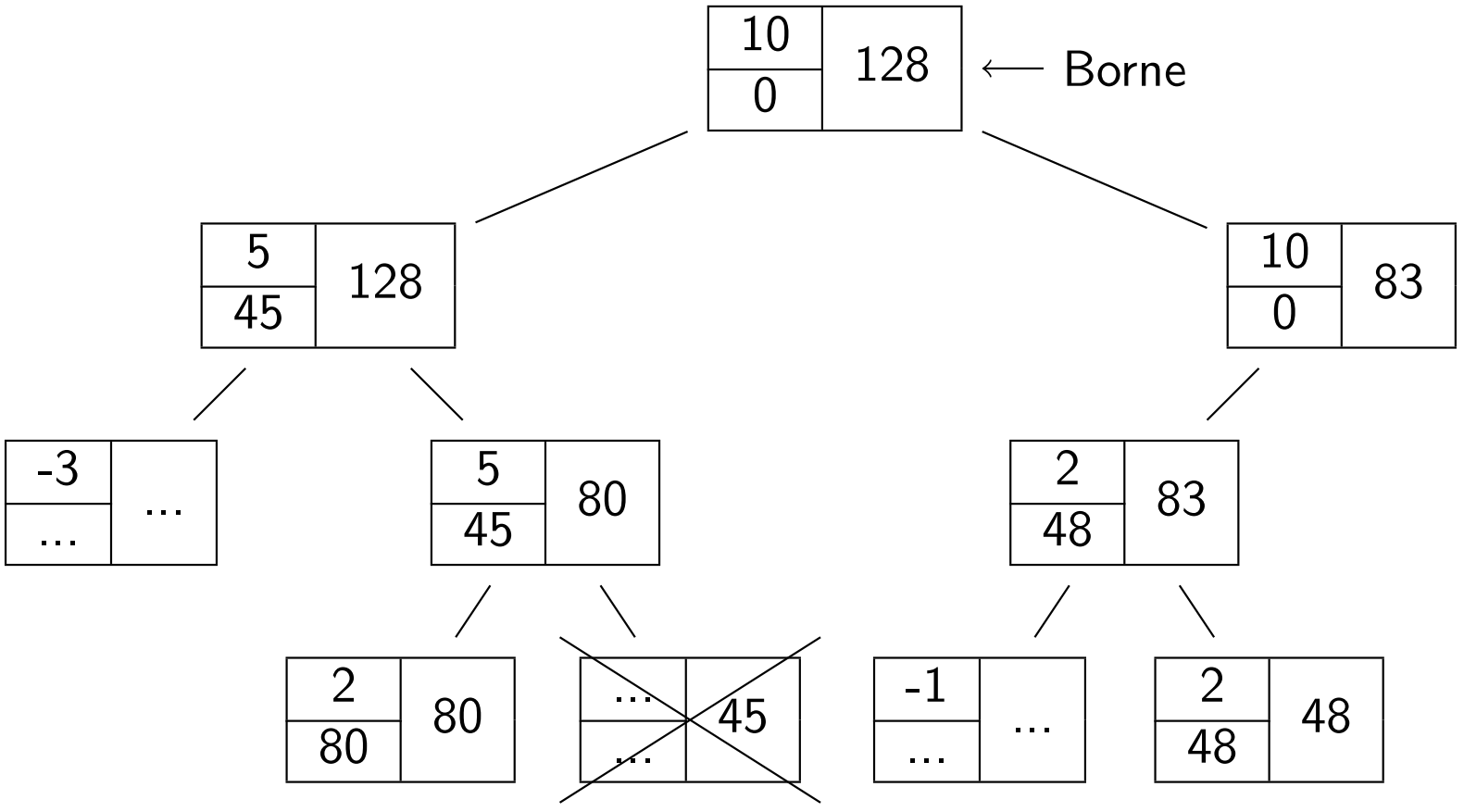
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

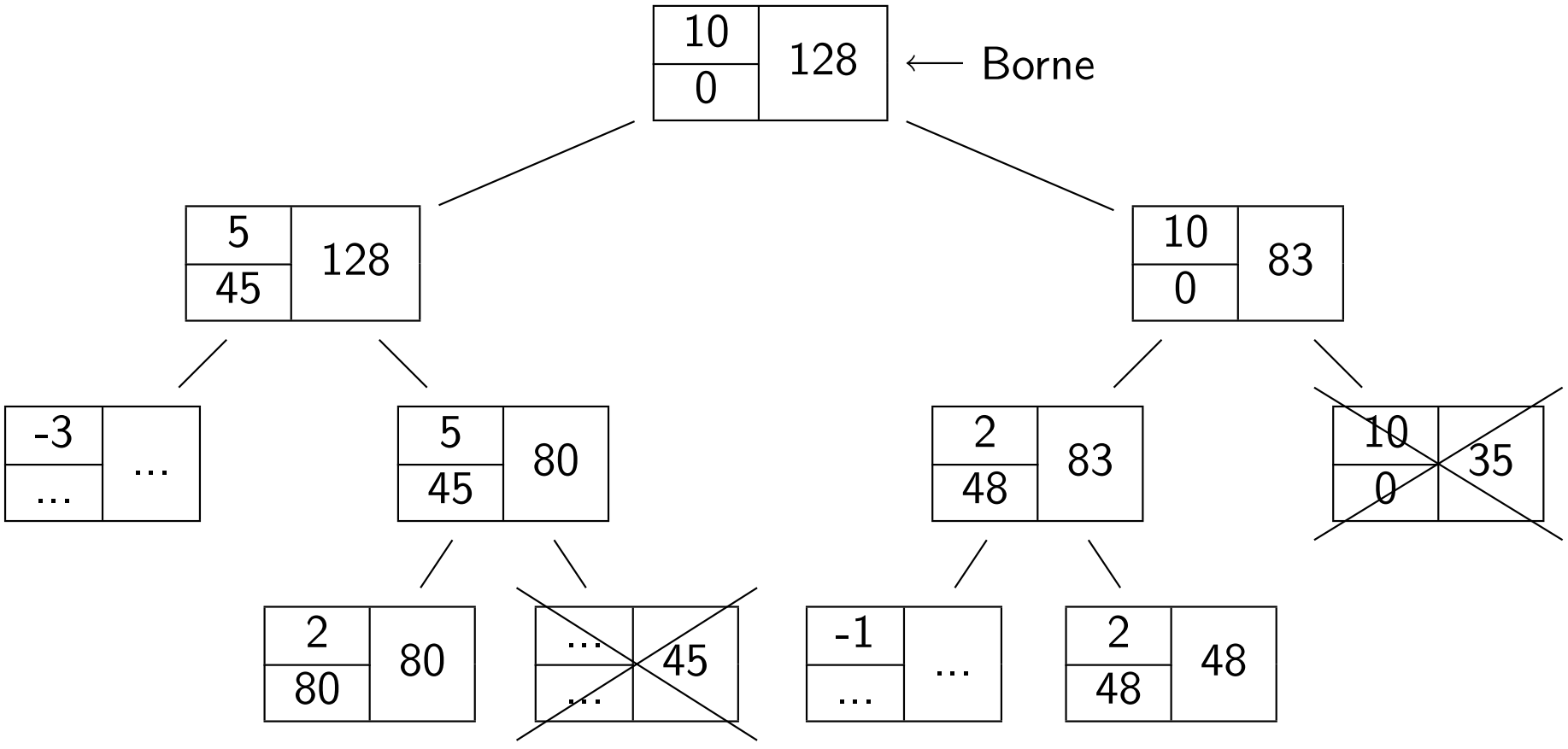
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80