Couplage maximum dans un graphe biparti

Quentin Fortier

November 14, 2024

Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

Définition

Un couplage de G est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

Définition

Un couplage de G est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

Définition

Un sommet $v \in S$ est couvert par M s'il appartient à une arête de M. Sinon, v est libre pour M.

Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

Définition

Un couplage de G est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ \ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

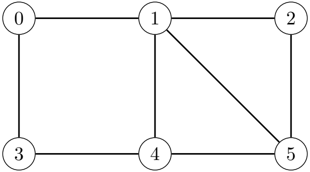
Définition

Un sommet $v \in S$ est couvert par M s'il appartient à une arête de M. Sinon, v est libre pour M.

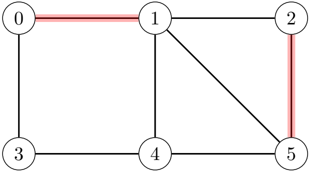
Applications :

- Mariage : chaque personne est mariée à au plus une autre personne
- Rech. de logement : couplage entre étudiants et logements

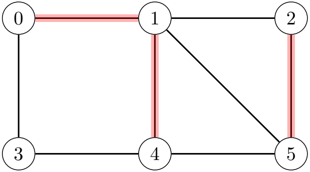
Couplage



Un graphe G



Un couplage de G (en rouge)



Pas un couplage

Couplage

Exercice

Écrire une fonction
`est_couplage : int array array -> (int*int) list -> bool`
déterminant si un ensemble d'arêtes forme un couplage d'un graphe.

Couplage

Soit M un couplage d'un graphe G.

Définitions

- La taille de M, notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
- M est un couplage maximum s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
- M est un couplage parfait si tout sommet de G appartient à une arête de M.

Couplage

Soit M un couplage d'un graphe G.

Définitions

- La taille de M, notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
- M est un couplage maximum s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
- M est un couplage parfait si tout sommet de G appartient à une arête de M.

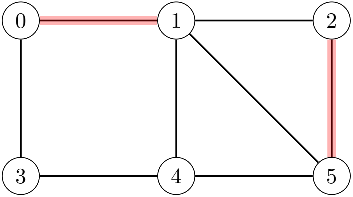
Question

M est un couplage maximal s'Il n'existe pas de couplage M' tel que $M \subsetneq M'$.
Quelle(s) implication(s) a t-on entre couplage maximum et couplage maximal ?

Couplage

Exercice

1. Le couplage ci-dessous est-il parfait ?
2. Quels sont les sommets couverts par ce couplage ? Et ceux libres ?
3. Le graphe ci-dessous admet-il un couplage parfait ?



Couplage

On va s'intéresser au problème suivant :

Problème : Couplage maximum

Entrée : Graphe G non orienté, non pondéré.
Sortie : Un couplage maximum de G.

Chemin augmentant

Soit M un couplage d'un graphe G.

Définition

- Un chemin est élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin élémentaire de G est M-alternant si ses arêtes sont alternativement dans M et dans $A \setminus M$.
- Un chemin de G est M-augmentant s'il est M-alternant et si ses extrémités sont libres pour M.

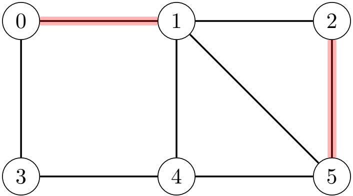
Chemin augmentant

Soit M un couplage d'un graphe G.

Définition

- Un chemin est élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin élémentaire de G est M-alternant si ses arêtes sont alternativement dans M et dans $A \setminus M$.
- Un chemin de G est M-augmentant s'il est M-alternant et si ses extrémités sont libres pour M.

Exemple : $3 - 0 - 1 - 2 - 5 - 4$ est un chemin M-augmentant pour le couplage ci-dessous.



Chemin augmentant

Définition (différence symétrique)

Si A et B sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Chemin augmentant

Définition (différence symétrique)

Si A et B sont des ensembles, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Un chemin est vu comme un ensemble d'arêtes.

Théorème

Soit M un couplage de G et P un chemin M-augmentant dans G. Alors $M\Delta P$ est un couplage de G.

Chemin augmentant

Définition (différence symétrique)

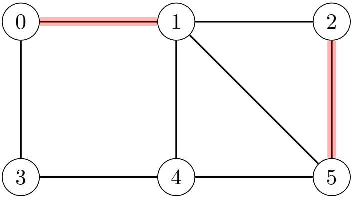
Si A et B sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Un chemin est vu comme un ensemble d'arêtes.

Théorème

Soit M un couplage de G et P un chemin M-augmentant dans G. Alors $M \Delta P$ est un couplage de G.

Exemple : Dessiner $M \Delta P$ pour le couplage ci-dessous et le chemin $P = 3 - 0 - 1 - 4$.



Chemin augmentant

Soit M un couplage d'un graphe G.

Théorème

M est un couplage maximum de G

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Chemin augmentant

Soit M un couplage d'un graphe G.

Théorème

M est un couplage maximum de G

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Preuve :

$\Longrightarrow$ Soit M un couplage maximum.
Supposons qu'il existe un chemin M-augmentant P.
Alors $M \Delta P$ est un couplage de G et $|M \Delta P| > |M|$: absurde.

Chemin augmentant

Théorème

M est un couplage maximum de G

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$.

Chemin augmentant

Théorème

$$M \text{ est un couplage maximum de } G$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{Il n'existe pas de chemin } M\text{-augmentant dans } G$$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2,

Chemin augmentant

Théorème

M est un couplage maximum de G

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.

Chemin augmentant

Théorème

M est un couplage maximum de G

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de M et des arêtes de M^*.

Chemin augmentant

Théorème

M est un couplage maximum de G

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M\Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de M et des arêtes de M^*.
3. Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de M^* que de M

Chemin augmentant

Théorème

M est un couplage maximum de G

$\iff$

Il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G

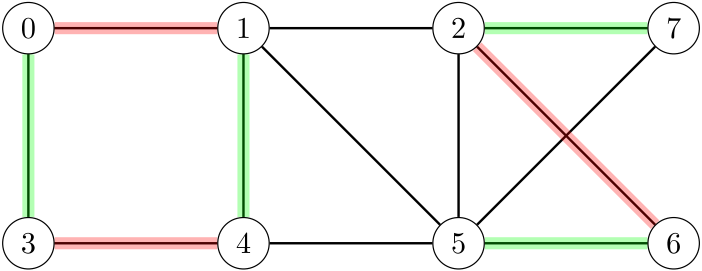
Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage M^* vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de G^* sont au plus 2, donc G^* est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de M et des arêtes de M^*.
3. Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de M^* que de M: c'est un chemin M^*-augmentant.

Chemin augmentant

Illustration de la preuve précédente :



Un couplage M et un couplage maximum M^*

Chemin augmentant

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (S, A)$
Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$
Tant que il existe un chemin M-augmentant P dans G **:**
$\quad M \leftarrow M \Delta P$

Chemin augmentant

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (S, A)$
Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$
Tant que il existe un chemin M-augmentant P dans G **:**
  $M \leftarrow M \Delta P$

Question

Comment trouver un chemin M-augmentant ?

- Dans un graphe quelconque, avec le Blossom algorithm (très compliqué et HP).
- Plus facilement dans un graphe biparti.

Graphe biparti

Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de A a une extrémité dans X et une extrémité dans Y.

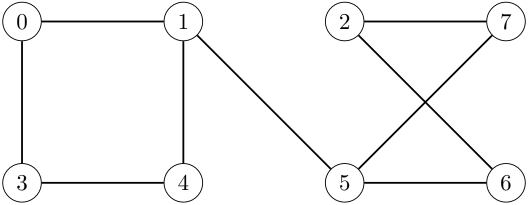
Graphe biparti

Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de A a une extrémité dans X et une extrémité dans Y.

Question

Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.



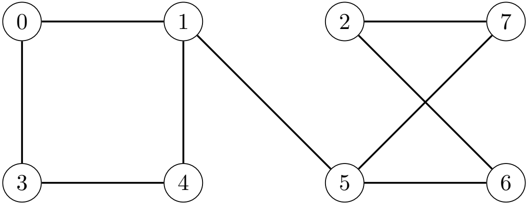
Graphe biparti

Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de A a une extrémité dans X et une extrémité dans Y.

Question

Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.



Question

Donner un exemple de graphe non biparti.

Graphe biparti

Définition équivalente :

Définition

On appelle k-coloration de G une fonction $c : S \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que pour tout arc $(u, v) \in A$, on a $c(u) \neq c(v)$.

Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est biparti.
- G admet une 2-coloration.
- G n'a pas de cycle de longueur impair.

Graphe biparti

Exercice

Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe est biparti, en complexité linéaire.

Graphe biparti

Exercice

Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe est biparti, en complexité linéaire.

Exercice

Modifier la fonction précédente pour renvoyer un 2-coloriage.

Graphe biparti

Pour trouver un chemin M-augmentant dans un graphe biparti G :

1. Partir d'un sommet libre.
2. Se déplacer en alternant entre des arêtes de M et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité (DFS).
3. Si on arrive à un sommet libre, alors on a trouvé un chemin M-augmentant.

Graphe biparti

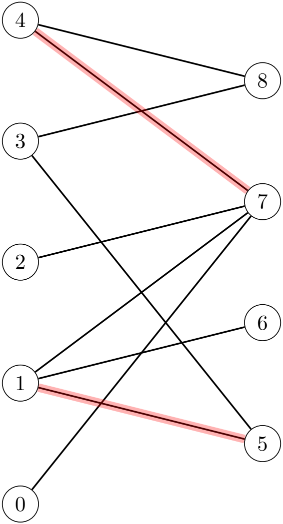
Pour trouver un chemin M-augmentant dans un graphe biparti G :

1. Partir d'un sommet libre.
2. Se déplacer en alternant entre des arêtes de M et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité (DFS).
3. Si on arrive à un sommet libre, alors on a trouvé un chemin M-augmentant.

Question

Pourquoi cet algorithme ne fonctionne pas sur un graphe général (non biparti) ?

Graphe biparti



Graphe biparti

On peut aussi construire un graphe G_M pour simplifier la recherche d'un chemin M-augmentant.

Graphe biparti

On peut aussi construire un graphe G_M pour simplifier la recherche d'un chemin M-augmentant.

Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti, avec $S = X \sqcup Y$, et M un couplage de G.
On définit un graphe orienté $G_M = (S_M, A_M)$ où :

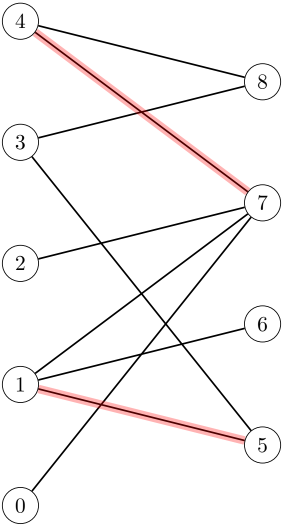
- $S_M = S \cup \{s, t\}$, où s et t sont deux nouveaux sommets.
- $A_M = \{(s, u) \mid u \in A \text{ et } u \text{ est libre}\} \cup \{(v, t) \mid v \in B \text{ et } v \text{ est libre}\} \cup \{(u, v) \mid \{u, v\} \in A \setminus M\} \cup \{(v, u) \mid \{u, v\} \in M\}$.

Graphe biparti

Autrement dit, G_M est construit à partir de G de la façon suivante :

- On ajoute deux nouveaux sommets s et t.
- On mets des arcs depuis s vers chaque sommet libre de X.
- On mets des arcs depuis chaque sommet libre de Y vers t.
- On oriente les arcs de M de Y vers X.
- On oriente les arcs de $A \setminus M$ de X vers Y.

Graphe biparti



Graphe biparti

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (S, A)$
Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$
Tant que il existe un chemin M-augmentant P dans G **:**
  $M \leftarrow M \Delta P$

Complexité pour un graphe biparti :

- Chaque recherche d'un chemin M-augmentant se fait par DFS en $O(|S| + |A|)$.
- Il y a au plus $|A|$ d'itération du « Tant que », car on ajoute une arête au couplage à chaque fois.

D'où une complexité totale $O(|A|(|S| + |A|))$.

Graphe biparti

Question

Appliquer l'algorithme précédent au graphe ci-dessous.