Déduction naturelle

Quentin Fortier

January 16, 2025

Système déductif : Définition

La logique propositionnelle (de MP2I) définit la valeur de vérité d'une formule en considérant toutes les valeurs possibles des variables booléennes.

La déduction naturelle formalise la notion de preuve mathématique.

Système déductif : Définition

Définition

Un séquent, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A.

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ, on peut déduire A.

Règles d'inférence

Définition

Une règle d'inférence est constituée :

- d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash A_1, ..., \Gamma_n \vdash A_n$ appelés prémisses
- d'un séquent $\Gamma \vdash A$ appelé conclusion.

On le représente :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A_2 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

Une règle sans prémisse est appelée axiome.

Règles d'inférence

Définition

On définit inductivement une preuve (ou arbre de preuve) d'un séquent $\Gamma \vdash A$ par :

- si $\Gamma \vdash A$ est un axiome, alors $\overline{\Gamma \vdash A}$ est une preuve de $\Gamma \vdash A$
- si la règle
$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A_2 \qquad\qquad \Gamma_k \vdash A_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une règle d'inférence et que $P_1, P_2, , P_k$ sont des preuves de $\Gamma \vdash A_1$, $\Gamma \vdash A_2$, ..., $\Gamma_k \vdash A_k$ respectivement, alors
$$\frac{P_1 \qquad P_2 \qquad\qquad P_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une preuve de $\Gamma \vdash A$.

On dit que $\Gamma \vdash A$ est prouvable s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash A$.

Règles d'inférence

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A_1} \qquad \dots \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma_n \vdash A_n}}{\Gamma \vdash A}$$

Déduction naturelle

La déduction naturelle est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

Déduction naturelle

La déduction naturelle est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax}$$

Déduction naturelle

La déduction naturelle est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \mathsf{ax}$$

- Affaiblissement :

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ \mathsf{aff}$$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\dots \vdash \dots}{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}$

Déduction naturelle : Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}$
- Règle d'élimination, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}{\ldots \vdash \ldots}$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow_i$$

Déduction naturelle : Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$

Déduction naturelle : Implication

Question

Prouver le séquent $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma \vdash A \to (B \to C)}\,\text{ax}
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{}{\Gamma \vdash B \to A}\,\text{ax}
        \qquad
        \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,\text{ax}
      }{\Gamma \vdash A}\,\to_e
    }{\Gamma \vdash B \to C}\,\to_e
    \qquad
    \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,\text{ax}
  }{
    \dfrac{\Gamma \vdash C}{A \to (B \to C), B \to A \vdash B \to C}\,\to_i
  }\,\to_e
}{A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)}\,\to_i
$$

Où $\Gamma = \{A \to (B \to C), B \to A, B\}$.

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

Il y a deux règles d'élimination pour le $\wedge$: on peut utiliser l'une ou l'autre.

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

Remarque : on peut aussi généraliser les règles avec différents contextes Γ, Γ' (ce qui revient à avoir le même contexte puis appliquer aff), pour simplifier les preuves.
Ainsi, on peut aussi utiliser :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Déduction naturelle : Conjonction $\wedge$

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Déduction naturelle : Conjonction $\land$

Question

Montrer $(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \to C \vdash A \land B \to C}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,\text{ax}}{A, B \vdash A \land B}\,\land_i}{(A \land B) \to C, A, B \vdash C}\,\to_e}{(A \land B) \to C, A \vdash B \to C}\,\to_i}{(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)}\,\to_i$$

Question

Montrer $A \to (B \to C) \vdash (A \land B) \to C$.

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Déduction naturelle : Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Exercice

1. Montrer $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$.
2. On admet aussi $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$.
   En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \; \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot} \; \neg_e$$

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Déduction naturelle : Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Remarque : il n'est pas possible de démontrer $\neg\neg A \vdash A$ sans règle supplémentaire (tiers-exclu ou raisonnement par l'absurde).

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\bot$ (faux) :

Déduction naturelle : Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\bot$ (faux) :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot_e$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \mathsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \mathsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \mathsf{te}$$

Déduction naturelle : Raisonnement par l'absurde

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \text{te}$$

On ajoute raa à la logique intuitioniste et on veut montrer te.

Question

1. Prouver $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.
2. Prouver $\vdash A \vee \neg A$.

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma,\ [\![A]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma,\ [\![A]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

Correction de la déduction naturelle

Définition (rappel)

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma, \llbracket A \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

On peut montrer :

- <u>Correction</u> : Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.
- <u>Complétude (HP)</u> : Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \models A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

$\wedge_i$ Supposons T de la forme : $$\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

<u>Preuve</u> (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

$\wedge_i$ Supposons T de la forme : $$\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

$\wedge_e$ Supposons T de la forme : $$\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g)$$

Par récurrence sur T_1, $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A \wedge B$.

Les autres cas sont similaires.

Correction de la déduction naturelle

Exercice

Montrer que le séquent $\vdash \bot$ n'est pas prouvable.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de complétude (HP)

Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Logique du premier ordre

La logique du premier ordre permet de faire des raisonnements dans un langage plus élaboré que celui qui se limite aux variables propositionnelles.

Définition

Un langage du premier ordre est la donnée de symboles de fonctions et d'un nombre de symboles de relation, ayant chacun d'une arité strictement positive.
Une fonction d'arité 0 est dite constante.

Logique du premier ordre

Exemples :

- La théorie des groupes avec la constante e, la fonction ${}^{-1}$ d'arité 1, la fonction $\star$ d'arité 2 et la relation $=$ d'arité 2.
- La théorie des ensembles avec la constante $\emptyset$, la fonction ^{c} d'arité 1, les fonctions $\cap$ et $\cup$ d'arité 2 et les relations $=$, $\in$, $\subset$ d'arité 2.

Logique du premier ordre

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. On définit par induction l'ensemble des termes sur $\mathcal{X}$:

- Une variable $x \in \mathcal{X}$ est un terme.
- Une constante est un terme.
- Si f est une fonction d'arité $n > 0$ et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme.

Logique du premier ordre

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. L'ensemble des formules de la logique du premier ordre est alors défini par induction par :

- si R est une relation d'arité n et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ est une formule de la logique du premier ordre.
- si A et B sont des formules de la logique du premier ordre et $x \in \mathcal{X}$, alors :
  - $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \rightarrow B$ sont des formules de la logique du premier ordre.
  - $\exists x\, A$ et $\forall x\, A$ sont des formules de la logique du premier ordre.

Logique du premier ordre

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c))$ est une formule.

Logique du premier ordre

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c))$ est une formule.

Attention : il ne faut pas confondre variable (terme décrivant un objet du langage du premier ordre étudié), par exemple un nombre réel, et variable propositionnelle (objet qui possède une valeur de vérité).

Logique du premier ordre

Définition

Si ϕ est une formule du premier ordre et x une variable, on dit que x est libre dans ϕ si elle n'est pas associée à un $\exists$ ou un $\forall$. Sinon, on dit que x est liée.

Définition

Si ϕ est une formule du premier ordre, on note $\phi[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x par t dans ϕ, après renommage des variables si nécessaire.

Exemple : Si $A = (\forall x(x = x)) \wedge \exists y(x = y)$. Alors $A[x := y \star y] = (\forall x(x = x)) \wedge \exists z(y \star y = z)$.

Logique du premier ordre

- Introduction de $\forall$, si x n'est pas une variable libre de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\, A}\ \forall_i$$

- Élimination de $\forall$, si A n'a pas de variable liée en commun avec t :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ \forall_e$$

Logique du premier ordre

- Introduction de $\exists$:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}\ \exists_i$$

- Élimination de $\exists$, si x n'est pas une variable libre de B ni de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash \exists\, xA \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \exists_e$$

Exercice

Montrer que le séquent suivant est prouvable :

$$\exists x\,(A \vee B) \vdash \exists x\, A \vee \exists x\, B$$