

Déduction naturelle

Quentin Fortier

January 23, 2025

Définition

Soit V un ensemble (de variables).

L'ensemble des formules logiques sur V est défini inductivement :

- \top (vrai) et \perp (faux) sont des formules
- Toute variable $x \in V$ est une formule
- Si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule
- Si φ, ψ sont des formules alors $\varphi \wedge \psi$ (conjonction) et $\varphi \vee \psi$ (disjonction) sont des formules

Déduction naturelle

La logique propositionnelle (de MP2I) définit la valeur de vérité d'une formule en considérant toutes les valeurs possibles des variables booléennes.

La déduction naturelle formalise la notion de preuve mathématique.

Définition

Un séquent, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A .

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ , on peut déduire A .

Définition

Une règle d'inférence est constituée :

- d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$ appelés prémisses
- d'un séquent $\Gamma \vdash A$ appelé conclusion.

On le représente :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \Gamma_2 \vdash A_2 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

Une règle sans prémisses est appelée axiome.

Définition

On définit inductivement une preuve (ou arbre de preuve, dérivation) d'un séquent $\Gamma \vdash A$ par :

- si $\Gamma \vdash A$ est un axiome, alors $\overline{\Gamma \vdash A}$ est une preuve de $\Gamma \vdash A$
- si la règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \Gamma_2 \vdash A_2 \quad \dots \quad \Gamma_k \vdash A_k}{\Gamma \vdash A} R$$

est une règle d'inférence et que P_1, P_2, \dots, P_k sont des preuves de $\Gamma \vdash A_1, \Gamma \vdash A_2, \dots, \Gamma \vdash A_k$ respectivement, alors

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_k}{\Gamma \vdash A} R$$

est une preuve de $\Gamma \vdash A$.

On dit que $\Gamma \vdash A$ est prouvable s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash A$.

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A_1} \quad \dots \quad \frac{\vdots}{\Gamma_n \vdash A_n}}{\Gamma \vdash A}$$

La logique classique est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

La logique classique est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

- Introduction de \top (vrai) :

- Introduction de \top (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- Élimination de \perp (faux) :

- Introduction de \top (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

- Élimination de \perp (faux) :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$$

Pour chaque connecteur logique (\rightarrow , \wedge , \vee , \neg), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots}{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}$$

Implication

Pour chaque connecteur logique (\rightarrow , \wedge , \vee , \neg), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots}{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}$$
- Règle d'élimination, de la forme :
$$\frac{\dots \vdash \dots \rightarrow \dots}{\dots \vdash \dots}$$

Implication

- Introduction de \rightarrow :

Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (modus ponens) :

Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

Implication

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

$$\frac{\overline{A \vdash A} \text{ ax}}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow_i$$

- Introduction de \rightarrow :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de \rightarrow (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$

Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du \wedge :

Conjonction \wedge

- Introduction du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du \wedge :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$$

Il y a deux règles d'élimination pour le \wedge : on peut utiliser l'une ou l'autre.

Remarque : on peut aussi généraliser les règles avec différents contextes Γ, Γ' , pour simplifier les preuves.

Ainsi, on peut aussi utiliser :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Conjonction \wedge

Question

Montrer $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \wedge B \rightarrow C \vdash A \wedge B \rightarrow C} \text{ ax}}{(A \wedge B) \rightarrow C, A, B \vdash C} \rightarrow_i}{(A \wedge B) \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C} \rightarrow_i}{(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow_i \quad \frac{\frac{\overline{A \vdash A} \text{ ax} \quad \overline{B \vdash B} \text{ ax}}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge_i}{A \wedge B \rightarrow C \vdash A \wedge B \rightarrow C} \rightarrow_e$$

Question

Montrer $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$.

Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Disjonction \vee

- Introduction de \vee :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$$

- Élimination de \vee :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$$

Exercice

- 1 Montrer $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$.
- 2 On admet aussi $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$.
En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Négation \neg

- Introduction de \neg :

Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

Négation \neg

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

- Introduction de \neg :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$$

- Élimination de \neg :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Remarque : il n'est pas possible de démontrer $\neg\neg A \vdash A$ sans règle supplémentaire (tiers-exclu ou raisonnement par l'absurde).

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ te}$$

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitionniste.

On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ te}$$

Question

On ajoute raa à la logique intuitionniste et on veut montrer te.

- 1 Prouver $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.
- 2 Prouver $\vdash A \vee \neg A$.

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

Définition

Soit v une valuation sur V .

L'évaluation $\llbracket \varphi \rrbracket_v$ d'une formule φ sur v est définie inductivement :

- $\llbracket \top \rrbracket_v = 1, \llbracket \perp \rrbracket_v = 0$
- $\llbracket x \rrbracket_v = v(x)$ si $x \in V$
- $\llbracket \neg \varphi \rrbracket_v = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v$
- $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_v = \min(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$
- $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_v = \max(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$

Si $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$, on dit que v est un modèle pour φ .

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma, \llbracket A \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma, \llbracket A \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma, \llbracket A \rrbracket_v = 1) \implies \llbracket A \rrbracket_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

On peut montrer :

- Correction : Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.
- Complétude (HP) : Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \vdash A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

\wedge_i Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2 , on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.

Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B , et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h + 1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T .

\wedge_i Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Par récurrence sur T_1 et T_2 , on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.

Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B , et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

\wedge_e Supposons T de la forme :
$$\frac{\frac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$$

Par récurrence sur T_1 , $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A$.

Les autres cas sont similaires.

Exercice

Montrer que le séquent $\vdash \perp$ n'est pas prouvable (on dit que la déduction naturelle est cohérente).

Théorème de complétude (HP)

Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Exercice

On considère les deux problèmes suivants :

DNAT

- Instance : un séquent $\Gamma \vdash \varphi$
- Question : $\Gamma \vdash \varphi$ est-il dérivable ?

TAUTOLOGIE

- Instance : une formule logique φ
- Question : φ est-elle une tautologie ?

On admet le théorème de complétude.

- 1 Montrer que TAUTOLOGIE se réduit polynomialement à DNAT.
- 2 Montrer que DNAT se réduit polynomialement à TAUTOLOGIE.
- 3 Montrer que DNAT est décidable.
- 4 Montrer que DNAT est co-NP complet.

La logique du premier ordre permet de faire des raisonnements dans un langage plus élaboré que celui qui se limite aux variables propositionnelles.

Définition

Un langage du premier ordre est la donnée de symboles de fonctions et d'un nombre de symboles de relation, ayant chacun d'une arité strictement positive.

Une fonction d'arité 0 est dite constante.

Exemples :

- La théorie des groupes avec la constante e , la fonction $^{-1}$ d'arité 1, la fonction \star d'arité 2 et la relation $=$ d'arité 2.
- La théorie des ensembles avec la constante \emptyset , la fonction c d'arité 1, les fonctions \cap et \cup d'arité 2 et les relations $=, \in, \subset$ d'arité 2.

Définition

Soit \mathcal{X} un ensemble de variables. On définit par induction l'ensemble des termes sur \mathcal{X} :

- Une variable $x \in \mathcal{X}$ est un terme.
- Une constante est un terme.
- Si f est une fonction d'arité $n > 0$ et t_1, \dots, t_n des termes alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

Définition

Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre. L'ensemble des formules de la logique du premier ordre est alors défini par induction par :

- si R est une relation d'arité n et t_1, \dots, t_n des termes alors $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une formule de la logique du premier ordre.
- si A et B sont des formules de la logique du premier ordre et $x \in \mathcal{X}$, alors :
 - $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \rightarrow B$ sont des formules de la logique du premier ordre.
 - $\exists x A$ et $\forall x A$ sont des formules de la logique du premier ordre.

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c)$ est une formule.

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c)$ est une formule.

Attention : il ne faut pas confondre variable (terme décrivant un objet du langage du premier ordre étudié), par exemple un nombre réel, et variable propositionnelle (objet qui possède une valeur de vérité).

Définition

Si φ est une formule du premier ordre et x une variable, on dit que x est libre dans φ si elle n'est pas associée à un \exists ou un \forall . Sinon, on dit que x est liée.

Définition

Si φ est une formule du premier ordre, on note $\varphi[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x par t dans φ , après renommage des variables si nécessaire.

Exemple : Si $A = (\forall x(x = x)) \wedge \exists y(x = y)$. Alors
 $A[x := y \star y] = (\forall x(x = x)) \wedge \exists z(y \star y = z)$.

- Introduction de \forall , si x n'est pas une variable libre de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall_i$$

Intuitivement : si A est vraie sans faire d'hypothèse sur x , alors elle est vraie quelle que soit la valeur de cette variable.

- Introduction de \forall , si x n'est pas une variable libre de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall_i$$

Intuitivement : si A est vraie sans faire d'hypothèse sur x , alors elle est vraie quelle que soit la valeur de cette variable.

- Élimination de \forall , si A n'a pas de variable liée en commun avec t :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_e$$

Intuitivement : si A est vraie pour toute valeur de x , alors elle est vraie en remplaçant x par t .

- Introduction de \exists :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i$$

Intuitivement : si A est vraie dans un cas particulier, c'est qu'il existe une variable pour laquelle elle est vraie.

- Introduction de \exists :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i$$

Intuitivement : si A est vraie dans un cas particulier, c'est qu'il existe une variable pour laquelle elle est vraie.

- Élimination de \exists , si x n'est pas une variable libre de B ni de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \exists_e$$

Intuitivement : si B est vraie pour une certaine variable et que cette variable n'intervient nulle part alors B est tout le temps vraie.

Exercice

Montrer les séquents suivants :

- 1 $\forall x \exists y x \vee y$
- 2 $\exists x (A \vee B) \vdash \exists x A \vee \exists x B$
- 3 $\neg(\exists x \varphi) \vdash \forall x \neg\varphi$
- 4 $\forall x (x \star x^{-1} = e) \vdash \forall x \forall y \exists z (x \star y) \star z = e$ dans le langage de la théorie des groupes