Logique propositionnelle

Quentin Fortier

February 22, 2026

Formule logique

Les formules logiques définies en MP2I par induction peuvent aussi être définies par une grammaire :

Formule logique

Soit V un ensemble de variables. L'ensemble des formules logiques sur V est le langage engendré par la grammaire :

$$S \to \top \mid \bot \mid x \mid (\neg S) \mid (S \vee S) \mid (S \wedge S)$$

où x est une variable de V.

Exercice

Cette grammaire est-elle ambiguë ? L'ensemble L des formules logiques est-il régulier ?

Formule logique

Soit $P(\varphi)$ une propriété sur les formules φ. Si les conditions suivantes sont vérifiées, alors $\forall \varphi, P(\varphi)$:

1. $P(\top)$, $P(\bot)$, et $\forall x \in V, \ P(x)$
2. $P(\varphi) \implies P(\neg \varphi)$
3. $P(\varphi_1)$ et $P(\varphi_2) \implies P(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
4. $P(\varphi_1)$ et $P(\varphi_2) \implies P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

Formule logique

Définition

- On définit $\varphi \longrightarrow \psi$ par $\neg\varphi \vee \psi$.
- On définit $\varphi \longleftrightarrow \psi$ par $\varphi \longrightarrow \psi \wedge \psi \longrightarrow \varphi$.

Évaluation de formule

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

0 est aussi noté Faux ou $\perp$. 1 est aussi noté Vrai ou $\top$.

Évaluation de formule

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

0 est aussi noté Faux ou $\perp$. 1 est aussi noté Vrai ou $\top$.

Définition

Soit v une valuation sur V.
L'évaluation $[\![\varphi]\!]_v$ d'une formule φ sur v est définie inductivement :

- $v(\top) = 1$, $v(\perp) = 0$
- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \to \psi) = v(\neg\varphi \vee \psi)$

Si $[\![\varphi]\!]_v = 1$, on dit que v est un modèle pour φ.

Évaluation de formule

```
let rec eval d = function
    | T -> true
    | F -> false
    | Var(x) -> d x
    | Not(p) -> not (eval p)
    | And(p, q) -> (eval p) && (eval q)
    | Or(p, q) -> (eval p) || (eval q)
```

Ici une valuation v à valeur booléenne est utilisée.

Évaluation de formule

Définition

Deux formules φ et ψ sont équivalentes (et on note $\varphi \equiv \psi$) si, pour toute valuation v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Évaluation de formule

Définition

Deux formules φ et ψ sont équivalentes (et on note $\varphi \equiv \psi$) si, pour toute valuation v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Lois de de Morgan

Pour toutes formules φ, ψ :

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Évaluation de formule

Quelques équivalences importantes :

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3$$

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$$

$$\boxed{\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)}$$

$$\boxed{\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)}$$

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_2 \longrightarrow \neg\varphi_1$$

Algèbre de Bool

En notant $\overline{a}$ au lieu de $\neg a$, $a + b$ au lieu de $a \vee b$, ab au lieu de $a \wedge b$, les équivalences précédentes deviennent :

$$\overline{\overline{a}} \equiv a$$

$$aa \equiv a$$

$$a + a \equiv a$$

$$a(bc) \equiv (ab)c$$

$$a + (b + c) \equiv (a + b) + c$$

$$a + bc \equiv (a + b)(a + c)$$

$$a(b + c) \equiv ab + ac$$

Et les lois de De Morgan :

$$\overline{a + b} \equiv \overline{a}\overline{b}$$

$$\overline{ab} \equiv \overline{a} + \overline{b}$$

Algèbre de Bool

Exercice

À quelle formule est équivalente $(\bigvee_i \varphi_i) \wedge (\bigvee_j \psi_j)$?

Et $(\bigwedge_i \varphi_i) \vee (\bigwedge_j \psi_j)$?

Algèbre de Bool

Exercice

Montrer que toute formule est équivalente à une forme normale négative, c'est à dire une formule où les $\neg$ ne sont que sur des variables.

Remarque : On peut montrer que $\neg\varphi$ peut être obtenu à partir de φ en inversant $\vee$ et $\wedge$, et chaque littéral avec sa négation.

Algèbre de Bool

On peut calculer sur des formules un peu comme sur les réels.
Par exemple, comme $(a + b)(c + d)e = ace + ade + bce + bde$:

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge e \equiv (a \wedge c \wedge e) \vee (a \wedge d \wedge e) \vee (b \wedge c \wedge e) \vee (b \wedge d \wedge e)$$

Table de vérité

Soit φ une formule sur V. On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité

Soit φ une formule sur V. On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$:

x	y	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chaque ligne correspond à une valuation v possible et $[\![\varphi]\!]_v$.

Table de vérité

Soit φ une formule sur V. On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$:

x	y	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chaque ligne correspond à une valuation v possible et $[\![\varphi]\!]_v$.

Deux formules sont équivalentes ssi elles ont la même table de vérité.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est une clause disjonctive (un $\vee$ de littéraux).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \vee \ldots \vee c_k$ où chaque c_i est une clause disjonctive (un $\vee$ de littéraux).

<u>Preuve</u> :

$$\varphi = \bigvee_{\substack{v \text{ valuation} \\ \text{tq } [\![\varphi]\!]_v = 1}} \Big(\bigwedge_{\substack{x \in V \\ \text{tq } v(x)=1}} x \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{x \in V \\ \text{tq } v(x)=0}} \neg x \Big)$$

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve :

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

<u>Preuve</u> : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p$.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge ... \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee ... \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee ... \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge ... \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \ldots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \ldots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \ldots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee \ldots \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \ldots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \ldots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \ldots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee \ldots \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).
Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \land ... \land c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\land$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \lor ... \lor c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \land ... \land \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \lor ... \lor c_k) \equiv \neg c_1 \land ... \land \neg c_k$ (de Morgan).
Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \land \ell_2 \land ... \land \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \lor ... \lor \neg\ell_p$ (de Morgan).
Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Autre preuve possible : par induction structurelle sur φ.

Forme normale disjonctive et conjonctive

Exercice

1. Montrer que le problème `SAT` restreint aux formes normales disjonctives appartient à P.
2. Existe-t-il un algorithme polynomial pour transformer une formule logique en une formule équivalente sous forme normale disjonctive ?

Forme normale disjonctive et conjonctive

Exercice

Combien existe-t-il de formules logiques sur un ensemble de n variables, à équivalence près ?

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A (ou que A est une conséquence de Γ), si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$\text{Pour toute valuation, } (\forall \varphi \in \Gamma,\ v(\varphi) = 1) \implies v(A) = 1$$

Forme normale disjonctive et conjonctive

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A (ou que A est une conséquence de Γ), si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$\text{Pour toute valuation, } (\forall \varphi \in \Gamma,\ v(\varphi) = 1) \implies v(A) = 1$$

Exemples :

- $x \models x \vee (y \wedge z)$
- $y \models x \longrightarrow y$

Forme normale disjonctive et conjonctive

Soient φ et ψ deux formules.

Exercice

Montrer que :

1. $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \longrightarrow \psi$
2. (loi de Pierce) $\models ((\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow \varphi) \longrightarrow \varphi$