

Logique propositionnelle

Quentin Fortier

March 2, 2026

Formule logique

Les formules logiques définies en MP2I par induction peuvent aussi être définies par une grammaire :

Formule logique

Soit V un ensemble de variables. L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules logiques sur V est le langage engendré par la grammaire :

$$S \rightarrow \top \mid \perp \mid x \in V \mid \neg S \mid (S \vee S) \mid (S \wedge S) \mid (S \rightarrow S)$$

où x est une variable de V .

Exercice

Cette grammaire est-elle ambiguë ? $\mathcal{F}$ est-il régulier ?

Soit $P(\varphi)$ une propriété sur les formules φ . Si les conditions suivantes sont vérifiées, alors $\forall \varphi, P(\varphi)$:

- ❶ $P(\top), P(\perp)$, et $\forall x \in V, P(x)$
- ❷ $P(\varphi) \implies P(\neg \varphi)$
- ❸ $P(\varphi_1)$ et $P(\varphi_2) \implies P(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
- ❹ $P(\varphi_1)$ et $P(\varphi_2) \implies P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

Évaluation de formule

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

0 est aussi noté Faux ou $\perp$. 1 est aussi noté Vrai ou $\top$.

Évaluation de formule

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

0 est aussi noté Faux ou $\perp$. 1 est aussi noté Vrai ou $\top$.

Définition

Soit v une valuation sur V .

L'évaluation $v(\varphi)$ d'une formule φ sur v est définie inductivement :

- $v(\top) = 1, v(\perp) = 0$
- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \rightarrow \psi) = v(\neg\varphi \vee \psi)$

Si $v(\varphi) = 1$, on dit que v est un modèle pour φ . On dit que φ est satisfiable s'il existe une valuation v telle que $v(\varphi) = 1$.

Définition

Deux formules φ et ψ sont équivalentes (et on note $\varphi \equiv \psi$) si, pour toute valuation v , $v(\varphi) = v(\psi)$.

Remarque : Deux formules sont équivalentes si et seulement si leur table de vérité est identique.

Évaluation de formule

Définition

Deux formules φ et ψ sont équivalentes (et on note $\varphi \equiv \psi$) si, pour toute valuation v , $v(\varphi) = v(\psi)$.

Remarque : Deux formules sont équivalentes si et seulement si leur table de vérité est identique.

Lois de de Morgan

Pour toutes formules φ, ψ :

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Évaluation de formule

Quelques équivalences importantes :

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3$$

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$$

$$\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

$$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$$

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_2 \longrightarrow \neg\varphi_1$$

Algèbre de Bool

En notant $\bar{a}$ au lieu de $\neg a$, $a + b$ au lieu de $a \vee b$, ab au lieu de $a \wedge b$, les équivalences précédentes deviennent :

$$\overline{\bar{a}} \equiv a$$

$$aa \equiv a$$

$$a + a \equiv a$$

$$a(bc) \equiv (ab)c$$

$$a + (b + c) \equiv (a + b) + c$$

$$a + bc \equiv (a + b)(a + c)$$

$$a(b + c) \equiv ab + ac$$

Et les lois de De Morgan :

$$\overline{a + b} \equiv \bar{a}\bar{b}$$

$$\overline{ab} \equiv \bar{a} + \bar{b}$$

Exercice

À quelle formule est équivalente $(\bigvee_i \varphi_i) \wedge (\bigvee_j \psi_j)$?

Et à quelle formule est équivalente $(\bigwedge_i \varphi_i) \vee (\bigwedge_j \psi_j)$?

Table de vérité

Soit φ une formule sur V . On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité

Soit φ une formule sur V . On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$:

x	y	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chaque ligne correspond à une valuation v possible et $v(\varphi)$.

Table de vérité

Soit φ une formule sur V . On peut représenter les différentes valeurs des évaluations de φ par une table de vérité.

Table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$:

x	y	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chaque ligne correspond à une valuation v possible et $v(\varphi)$.

Deux formules sont équivalentes ssi elles ont la même table de vérité.

Exercice

Montrer que $\rightarrow$ n'est pas associatif, c'est à dire que $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ n'est pas forcément équivalent à $(A \rightarrow B) \rightarrow C$.

Remarque : on parenthèse à droite les implications, c'est-à-dire que $A \rightarrow B \rightarrow C$ est une abréviation de $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Exercice

Montrer que toute formule est équivalente à une forme normale négative, c'est à dire une formule où les $\neg$ ne sont que sur des variables.

Remarque : On peut montrer que $\neg\varphi$ est équivalente à φ dans laquelle on inverse $\vee$ et $\wedge$, et chaque littéral avec sa négation.

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est une clause disjonctive (un $\vee$ de littéraux).

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est une clause disjonctive (un $\vee$ de littéraux).

Preuve :

$$\varphi = \bigvee_{\substack{v \text{ valuation} \\ \text{tq } v(\varphi)=1}} \left(\bigwedge_{\substack{x \in V \\ \text{tq } v(x)=1}} x \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{x \in V \\ \text{tq } v(x)=0}} \neg x \right)$$

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve :

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p$.

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p$.
Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \dots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \dots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p$.

Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \dots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \dots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee \dots \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p$.

Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \dots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \dots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee \dots \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).

Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Théorème

Toute formule logique est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$ où chaque c_i est une clause conjonctive (un $\wedge$ de littéraux).

Preuve : $\neg\varphi$ est équivalente à une forme normale disjonctive, c'est à dire $\neg\varphi \equiv c_1 \vee \dots \vee c_k$ où chaque c_i est de la forme $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p$.

Alors $\neg\neg\varphi = \neg(c_1 \vee \dots \vee c_k) \equiv \neg c_1 \wedge \dots \wedge \neg c_k$ (de Morgan).

Et $\neg c_i = \neg(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge \ell_p) \equiv \neg\ell_1 \vee \dots \vee \neg\ell_p$ (de Morgan).

Donc $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ est bien équivalente à une forme normale conjonctive.

Autre preuve possible : par induction structurelle sur φ .

Exercice

- 1 Montrer que le problème SAT restreint aux formes normales disjonctives appartient à P.
- 2 Existe-t-il un algorithme polynomial pour transformer une formule logique en une formule équivalente sous forme normale disjonctive ?

Exercice

Combien existe-t-il de formules logiques sur un ensemble de n variables, à équivalence près ?

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que A est une conséquence de Γ , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

Pour toute valuation, $(\forall \varphi \in \Gamma, v(\varphi) = 1) \implies v(A) = 1$

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que A est une conséquence de Γ , si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A , c'est-à-dire :

Pour toute valuation, $(\forall \varphi \in \Gamma, v(\varphi) = 1) \implies v(A) = 1$

Exemples :

- $x \models x \vee (y \wedge z)$
- $y \models x \longrightarrow y$

Soient φ et ψ deux formules.

Exercice

Montrer :

- ❶ $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models \varphi \rightarrow \psi$
- ❷ (loi de Pierce) $\models ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$