

# Algorithme min-max et élagage $\alpha - \beta$

Quentin Fortier

January 27, 2026

## Algorithme min-max

L'algorithme de calcul des attracteurs demande de parcourir chaque sommet du graphe des configurations possibles.

Il est donc beaucoup trop lent pour des jeux comme les échecs ( $\approx 10^{44}$  sommets) ou le go ( $\approx 10^{170}$ ) où le nombre de configurations est très grand.

## Algorithme min-max

On rappelle qu'une heuristique est une fonction qui à une configuration associe une valeur dans  $\mathbb{R}$  pour aider la recherche.

# Algorithme min-max

On rappelle qu'une heuristique est une fonction qui à une configuration associe une valeur dans  $\mathbb{R}$  pour aider la recherche.

Exemples :

- L'algorithme A\* utilise une heuristique pour estimer la distance entre un sommet et la destination.
- La méthode de branch-and-bound utilise une heuristique pour majorer la valeur d'une solution partielle.

## Algorithme min-max

L'algorithme min-max utilise une heuristique  $h$  qui estime à quel point la configuration  $s$  est favorable à un joueur : plus  $h(s)$  est grand, plus  $v$  est favorable au joueur 0 et inversement.

On prend en général  $h(s) = \infty$  ( $h(s) = -\infty$ ) si  $s$  est gagnant pour le joueur 0 (resp. 1).

## Algorithme min-max

L'algorithme min-max utilise une heuristique  $h$  qui estime à quel point la configuration  $s$  est favorable à un joueur : plus  $h(s)$  est grand, plus  $v$  est favorable au joueur 0 et inversement.

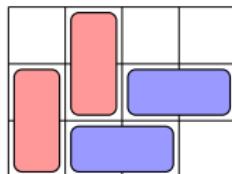
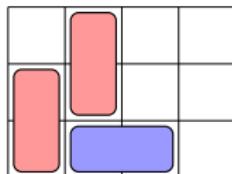
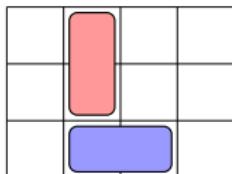
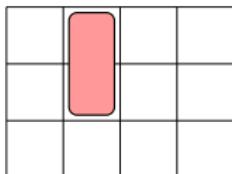
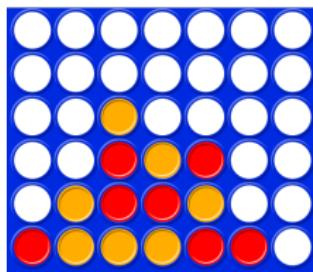
On prend en général  $h(s) = \infty$  ( $h(s) = -\infty$ ) si  $s$  est gagnant pour le joueur 0 (resp. 1).

Remarque : Aussi bien pour l'algorithme A\* que min-max, utiliser une heuristique permet d'accélérer la recherche, mais le résultat n'est pas forcément optimal. Par contre, branch-and-bound donne une solution optimale.

# Algorithme min-max

## Question

- 1 Proposer une heuristique pour le puissance 4.
- 2 Proposer une heuristique pour le domineering.

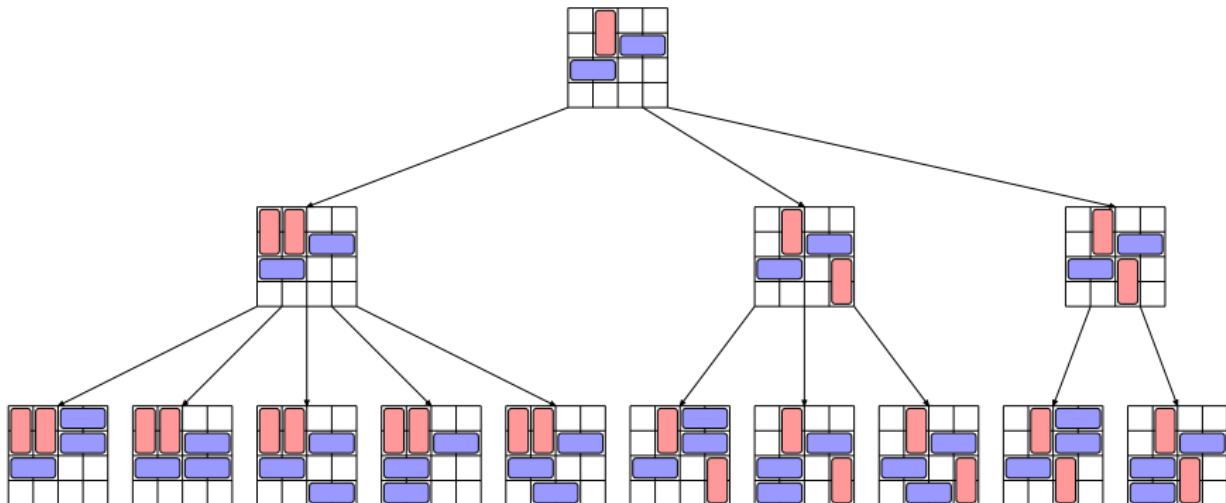


# Algorithme min-max

On fixe une profondeur  $p \in \mathbb{N}$ .

L'algorithme min-max considère, depuis la position en cours, le graphe acyclique des positions atteignables après au plus  $p$  coups.

Exemple : graphe des positions atteignables après  $p = 2$  coups.



## Algorithme min-max

L'algorithme min-max donne une valeur à chaque sommet de l'arbre de proche en proche :

- 1 Calcul de l'heuristique des sommets à profondeur  $p$  et ceux sans successeurs.

## Algorithme min-max

L'algorithme min-max donne une valeur à chaque sommet de l'arbre de proche en proche :

- ① Calcul de l'heuristique des sommets à profondeur  $p$  et ceux sans successeurs.
- ② Calcul de la valeur des sommets à profondeur  $p - 1$  en prenant le maximum (pour le joueur 0) ou le minimum (pour le joueur 1) des valeurs des successeurs.

## Algorithme min-max

L'algorithme min-max donne une valeur à chaque sommet de l'arbre de proche en proche :

- 1 Calcul de l'heuristique des sommets à profondeur  $p$  et ceux sans successeurs.
- 2 Calcul de la valeur des sommets à profondeur  $p - 1$  en prenant le maximum (pour le joueur 0) ou le minimum (pour le joueur 1) des valeurs des successeurs.
- 3 ...
- 4 Calcul de la valeur de la racine.

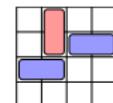
# Algorithme min-max

## Remarques :

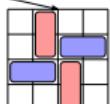
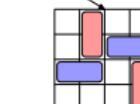
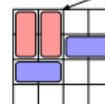
- On peut voir l'algorithme de calcul des attracteurs comme un algorithme min-max avec une profondeur illimitée,  $+\infty / -\infty$  au lieu de **true/false** et **min/max** au lieu de  $\forall/\exists$ .
- Par contre, le calcul des attracteurs fonctionne même en présence de cycles et de manière bottom-up (en partant des feuilles) alors que min-max nécessite un graphe acyclique et fonctionne de manière top-down.

# Algorithme min-max

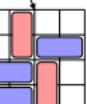
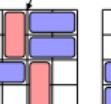
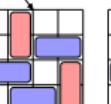
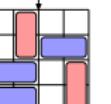
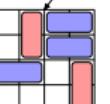
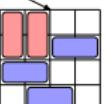
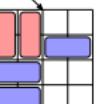
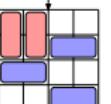
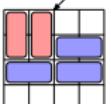
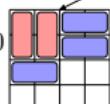
Joueur 0  
(max)



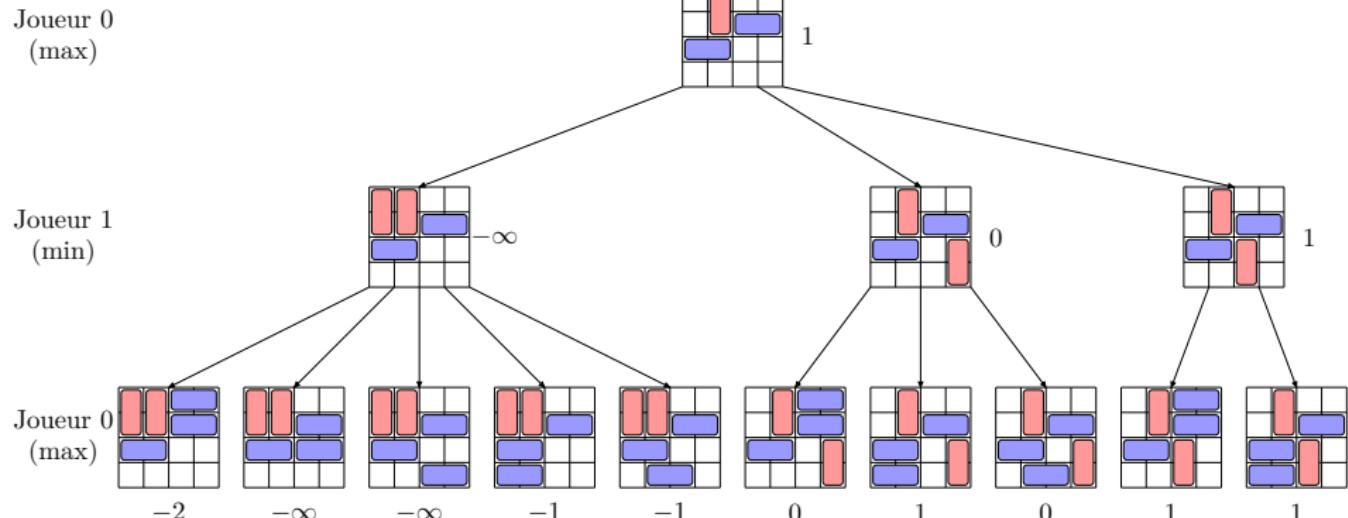
Joueur 1  
(min)



Joueur 0  
(max)

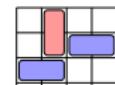


# Algorithme min-max



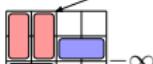
# Algorithme min-max

Joueur 0  
(max)

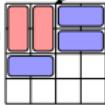


1

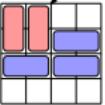
Joueur 1  
(min)



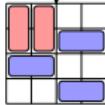
Joueur 0  
(max)



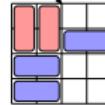
$-2$



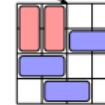
$-\infty$



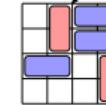
$-\infty$



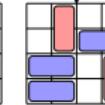
$-1$



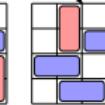
$-1$



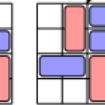
$0$



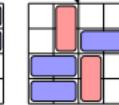
$0$



$1$



$1$



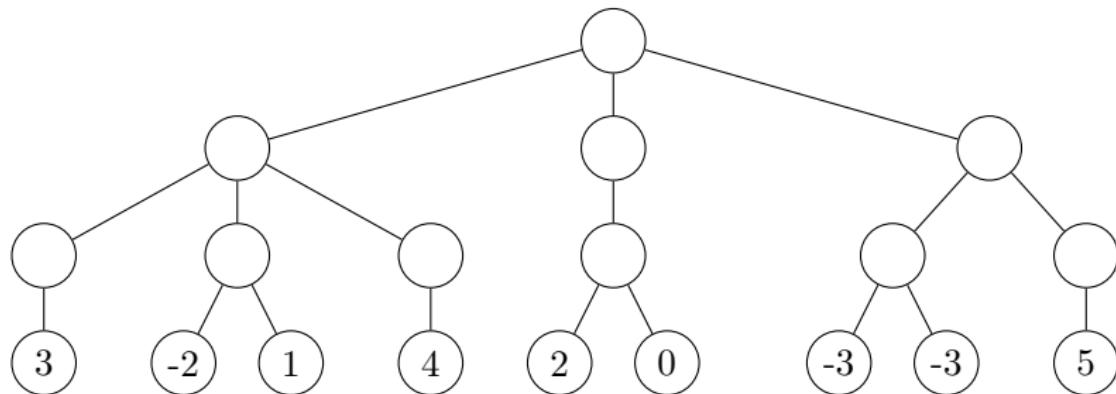
$1$

Le joueur 0 choisit le coup maximisant la valeur du successeur (le joueur 1 choisirait le coup minimisant l'heuristique).

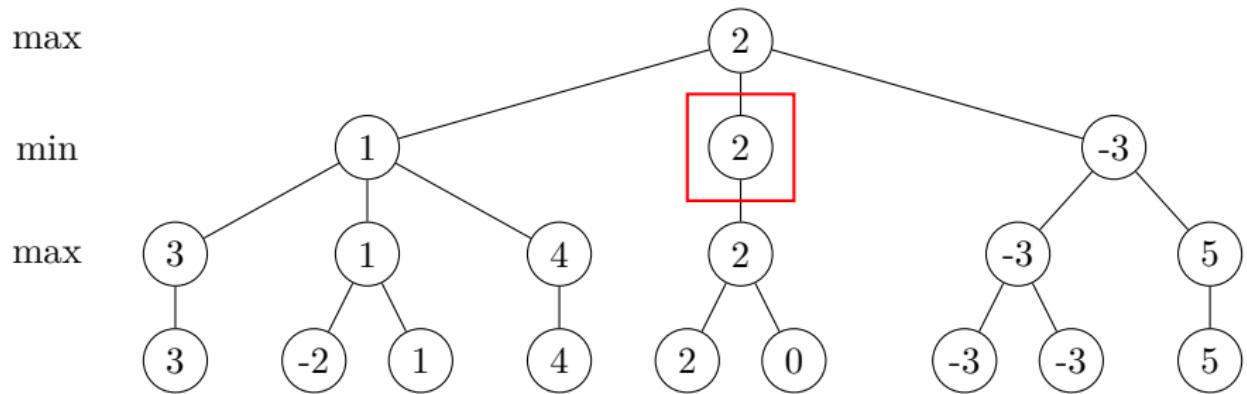
# Algorithme min-max

## Question

Compléter l'arbre min-max ci-dessous où on a mis les valeurs de l'heuristique à profondeur  $p$ . Le joueur qui joue en premier souhaite maximiser l'heuristique.



# Algorithme min-max



# Algorithme min-max

## Question

Écrire une fonction récursive `minmax p j s` renvoyant la valeur de la configuration `s`, où `j` est le joueur actuel et `p` est la profondeur maximum. On suppose définie une heuristique `h` et une fonction `successeur` donnant la liste des configurations atteignables depuis une configuration donnée.

# Algorithme min-max

---

```
let rec minmax p j s =
  let succ = successeurs s in
  if succ = [] || p = 0 then h s
  let l = List.map (minmax (p - 1) (1 - j)) succ in
  else if j = 0 then max_list l
  else min_list l
```

---

Remarque : On peut renvoyer un couple (valeur, coup) pour obtenir le prochain coup à jouer.

## Élagage $\alpha - \beta$

On peut accélerer l'algorithme min-max :

- En mémoïsant les configurations déjà rencontrées.
- En élaguant les branches inutiles.

## Élagage $\alpha - \beta$

L'élagage  $\alpha - \beta$  conserve des bornes  $\alpha \leq \beta$  (initialisées à  $-\infty$  et  $\infty$ ) encadrant la valeur de la racine, ce qui permet d'élaguer des branches inutiles :

## Élagage $\alpha - \beta$

L'élagage  $\alpha - \beta$  conserve des bornes  $\alpha \leq \beta$  (initialisées à  $-\infty$  et  $\infty$ ) encadrant la valeur de la racine, ce qui permet d'élaguer des branches inutiles :

- Si on est sur un sommet « max » et qu'on trouve une valeur supérieure à  $\beta$ , on peut arrêter le parcours (toutes les valeurs suivantes seront supérieures à  $\beta$ ).
- Si on est sur un sommet « min » et qu'on trouve une valeur inférieure à  $\alpha$ , on peut arrêter le parcours (toutes les valeurs suivantes seront inférieures à  $\alpha$ ).

## Élagage $\alpha$ - $\beta$

L'élagage  $\alpha$  -  $\beta$  conserve des bornes  $\alpha \leq \beta$  (initialisées à  $-\infty$  et  $\infty$ ) encadrant la valeur de la racine, ce qui permet d'élaguer des branches inutiles :

- Si on est sur un sommet « max » et qu'on trouve une valeur supérieure à  $\beta$ , on peut arrêter le parcours (toutes les valeurs suivantes seront supérieures à  $\beta$ ).
- Si on est sur un sommet « min » et qu'on trouve une valeur inférieure à  $\alpha$ , on peut arrêter le parcours (toutes les valeurs suivantes seront inférieures à  $\alpha$ ).

On met à jour  $\alpha$  et  $\beta$  au cours des appels récursifs :

- Si on est sur un sommet « max » et qu'on trouve une valeur  $v$  supérieure à  $\alpha$ , on met  $v$  dans  $\alpha$  (la valeur qui sera renvoyée sera au moins  $v$ ).
- Si on est sur un sommet « min » et qu'on trouve une valeur  $v$  inférieure à  $\beta$ , on met  $v$  dans  $\beta$  (la valeur qui sera renvoyée sera au plus  $v$ ).

---

```
def minmax(alpha, beta, p, s, j):
    succ = successeurs(s)
    if p == 0 or succ == []:
        return h(s)
    if j == 0:
        maxi = float('-inf')
        for t in succ:
            maxi = max(maxi, minmax(alpha, beta, p - 1, t, 1 - j))
            if maxi >= beta:
                return maxi
            alpha = max(alpha, maxi)
        return maxi
    else:
        mini = float('inf')
        for t in succ:
            mini = min(mini, minmax(alpha, beta, p - 1, t, 1 - j))
            if mini <= alpha:
                return mini
            beta = min(beta, mini)
        return mini
```

---

# Élagage $\alpha - \beta$

## Exercice

Compléter l'arbre ci-dessous en utilisant l'algorithme min-max avec élagage  $\alpha - \beta$ . Préciser les sommets élagués.

