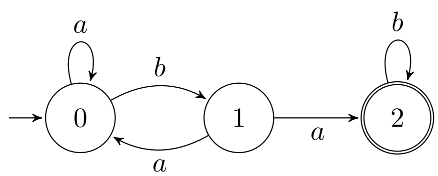
Il est particulièrement important de connaître les théorèmes et les preuves de ce chapitre.

I Automate (non déterministe)

Définition : Automate (non déterministe)

Un automate (non déterministe) est un 5-uplet (Σ, Q, I, F, E) où :
- Σ est un alphabet
- Q est un ensemble fini d'états
- $I \subset Q$ est un ensemble d'états initiaux
- $F \subset Q$ est un ensemble d'états acceptants (ou états finaux)
- $E \subset Q \times \Sigma \times Q$ est un ensemble de transitions

Exemple : $A_1 = (\Sigma, Q, I, F, E)$ où $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $I = \{0\}$, $F = \{2\}$ et $E = \{(0, a, 0), (0, b, 1), (1, a, 0), (1, a, 2), (2, b, 2)\}$.



Représentation graphique de A_1. Les états finaux sont représentés
par des doubles cercles et les états initiaux par des flèches entrantes.

Définition : Fonction de transition

On peut remplacer l'ensemble E de transitions par une fonction de transition $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ telle que :

$$\delta(q, a) = \{q' \in Q \mid (q, a, q') \in E\}$$

On dit qu'il y a un blocage lorsque $\delta(q, a) = \emptyset$ (pas de transition possible depuis q avec la lettre a).

Exercice 1.
Donner la fonction de transition de A_1 dans le tableau suivant.

état q	lettre a	$\delta(q, a)$
0	a	
0	b	
1	a	
1	b	
2	a	
2	b	

Quelques possibilités d'implémentation de la fonction de transition :

- une matrice (en stockant le tableau ci-dessus)
- une fonction OCaml de type `int -> char -> int list`
- un dictionnaire où chaque clé est un couple (q, a) auquel est associé $\delta(q, a)$

Implémentations possibles d'un dictionnaire :

- Par arbre binaire de recherche où chaque nœud est un couple $(\text{cle}, \text{valeur})$. Les clés doivent être ordonnées. C'est une implémentation immuable (on ne peut pas modifier un arbre, on crée un nouvel arbre à chaque modification).
- Par table de hachage, composée d'un tableau contenant les valeurs et une fonction de hachage h telle que, si k est une clé, $h(k)$ est l'indice du tableau où se trouve la valeur associée à k. Les clés doivent être hashables. C'est une implémentation mutable (on peut modifier les éléments de la table de hachage).

Exemple avec une table de hachage :

```
type automate = {
    initiaux : int list;
    finaux : int list;
    delta : (int*char, int list) Hashtbl.t
}
```

Fonction	Type	Description
`create`	`int -> ('a, 'b) Hashtbl.t`	crée une table de hachage
`add`	`('a, 'b) Hashtbl.t -> 'a -> 'b -> unit`	ajoute une clé et sa valeur
`find`	`('a, 'b) Hashtbl.t -> 'a -> 'b`	renvoie la valeur associée à une clé (exception si non trouvée)
`find_opt`	`('a, 'b) Hashtbl.t -> 'a -> 'b option`	renvoie `Some v` où `v` est la valeur associée à une clé ou `None` si non trouvée
`mem`	`('a, 'b) Hashtbl.t -> 'a -> bool`	teste si une clé est présente

Fonctions du module `Hashtbl` (non exigibles)

II Langage reconnaissable

Soit A un automate.

Définition : Chemin acceptant

Un chemin dans A est une suite de transitions consécutives de la forme

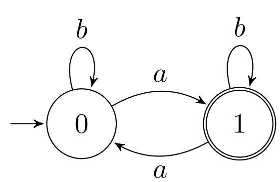
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{a_n} q_n$$

L'étiquette de ce chemin est le mot $a_1a_2...a_n$.
Ce chemin est acceptant si $q_0 \in I$ et $q_n \in F$.

Définition : Langage reconnu par un automate

Un mot u est accepté par A s'il est l'étiquette d'un chemin acceptant.
Le langage $L(A)$ reconnu (ou accepté) par A est l'ensemble des mots acceptés par A.
Un langage est reconnaissable s'il est reconnu par un automate.

Exercice 2.
Le langage reconnu par l'automate A ci-dessous est : ____________________



Exercice 3.

1. Montrer que $ab \mid abc \mid c$ est reconnaissable.
2. Montrer que l'ensemble des mots de longueur paire sur $\Sigma = \{a, b\}$ est reconnaissable.
3. Montrer que $(b \mid ab \mid aba)^*$ est reconnnaissable.

III Test d'appartenance au langage d'un automate

Une possibilité pour savoir si un automate A accepte un mot $m = m_1...m_n$:

- On part de l'ensemble I des états initiaux.
- On calcule l'ensemble Q_1 des états accessibles à partir d'un état de I en lisant la lettre m_1.
- On calcule l'ensemble Q_2 des états accessibles à partir d'un état de Q_1 en lisant la lettre m_2.
- ...
- On calcule l'ensemble Q_n des états accessibles à partir d'un état de Q_{n-1} en lisant la lettre m_n.
  m est accepté par A si et seulement si Q_n contient un état final (c'est-à-dire $Q_n \cap F \neq \emptyset$).

Exercice 4.

1. Écrire une fonction `etape a etats lettre` qui renvoie la liste des états accessibles depuis la liste `etats` en lisant `lettre`, dans l'automate `a`.
2. Écrire une fonction `accepte (a : automate) (mot : string)` qui détermine si le mot `mot` est accepté par l'automate `a`.
3. Quelle est la complexité de `accepte` ?

Remarque : on peut aussi utiliser du backtracking (retour sur trace) en essayant, pour chaque lettre, une transition possible et en revenant en arrière si on est bloqué.

IV Automate complet

Définition : Automates équivalents

Deux automates sont équivalents s'ils ont le même langage.

Définition : Automate complet

Un automate (Σ, Q, I, F, E) est complet si : $\forall q \in Q,\ \forall a \in \Sigma,\ \exists (q, a, q') \in E$

Autrement dit : un automate est complet s'il n'a pas de blocage.

Théorème

Tout automate est équivalent à un automate complet.

Preuve :

V Automate déterministe

Définition : Automate déterministe

Un automate $A = (\Sigma, Q, \{q_i\}, F, E)$ est déterministe si :

1. Il n'y a qu'un seul état initial q_i.
2. $(q, a, q_1) \in E \wedge (q, a, q_2) \in E \implies q_1 = q_2$: il y a au plus une transition possible en lisant une lettre depuis un état.

Si A est déterministe et complet alors il existe une unique transition possible depuis un état en lisant une lettre. La fonction de transition est alors de la forme $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$.

Exercice 5.
Si A est déterministe complet alors son nombre de transitions est : ____________________

Définition : Fonction de transition étendue

Si A est déterministe et complet, on peut étendre $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ en une fonction de transition sur les mots $\delta^* : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$ définie par :

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$
- Si $u = av$, $\delta^*(q, av) = \delta^*(\delta(q, a), v)$

$\delta^*(q, u)$ est l'état auquel on arrive en lisant le mot u depuis l'état q. On a alors :

$$\delta^*(q_i, u) \in F \iff u \in L(A)$$

Attention : δ^* n'est pas défini pour un automate non déterministe complet.

Théorème

Soit A un automate déterministe complet, q un état et u, v des mots. Alors :

$$\delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q, u), v)$$

Preuve :

Un automate déterministe complet peut être représenté par le type plus simple :

```
type afdc = {
    initial : int;
    finaux : int list;
    delta : (int*char, int) Hashtbl.t
}
```

Contrairement à un automate non déterministe, on peut déterminer si un mot `m` est accepté par un automate déterministe complet, en complexité linéaire en la taille de `m` :

```
let accepte a m =
    let etat = ref a.initial in
    for i = 0 to String.length m - 1 do
        etat := Hashtbl.find a.delta (!etat, m.[i])
    done;
    List.mem !etat a.finaux
```

Théorème : Déterminisation ♡

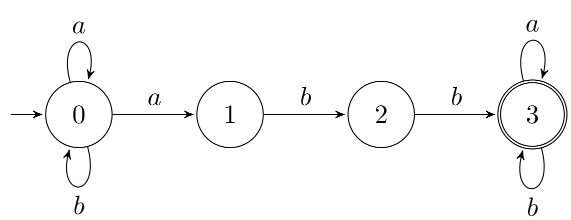
Soit A un automate. Alors A est équivalent à un automate déterministe complet.

Preuve : A est équivalent à l'automate des parties $A' = (\Sigma, \mathcal{P}(Q), \{I\}, F', \delta')$ où $F' = \{X \subseteq Q \mid X \cap F \neq \emptyset\}$ et $\delta'((q, X), a) = \bigcup_{q \in X} \delta(q, a)$.

Remarques :

- L'état $\emptyset$ est similaire à l'état q_∞ utilisé pour rendre un automate complet.
- A' possède $2^{|Q|}$ états et $2^{|Q|} \times |\Sigma|$ transitions, donc est de taille exponentielle en la taille de A.
- En pratique, on construit l'automate des parties de proche en proche en partant de l'état initial (comme un parcours de graphe) et on ne dessine que les états de $\mathcal{P}(Q)$ qui sont atteignables.

Exercice 6.
Déterminiser l'automate suivant. ♡



Exercice 7.
Soit $\Sigma = \{a, b\}$, $n \in \mathbb{N}$ et $L_n = \Sigma^* a \Sigma^n$.

1. Montrer que L_n est reconnaissable par un automate non-déterministe à $n + 2$ états.
2. Montrer que L_n est reconnu par un automate déterministe à 2^{n+2} états.
3. Montrer que L_n ne peut pas être reconnu par un automate déterministe à moins de 2^n états.

VI Stabilité des langages reconnaissables

Théorème : Stabilité par complémentaire ♡

Soit L un langage reconnaissable, sur un alphabet Σ. Alors $\overline{L} \overset{\text{def}}{=} \Sigma^* \backslash L$ est reconnaissable.

Preuve :

Exercice 8.
Montrer qu'il est nécessaire d'utiliser un automate déterministe complet dans la preuve précédente.

Exercice 9.
On utilise l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Dessiner un automate reconnaissant les mots ayant aaa comme facteur.
2. En déduire un automate reconnaissant les mots n'ayant pas aaa comme facteur.

Théorème : Stabilité par intersection, union et différence ♡

Soient L_1 et L_2 deux langages reconnaissables sur le même alphabet Σ. Alors :
- $L_1 \cap L_2$ est reconnaissable.
- $L_1 \cup L_2$ est reconnaissable.
- $L_1 \backslash L_2$ est reconnaissable.

Preuve ♡:
Pour $k \in \{1, 2\}$, soit $A_k = (\Sigma, Q_k, i_k, F_k, \delta_k)$ un automate déterministe complet reconnaissant L_k.
L'automate produit $A_1 \times A_2 \overset{\text{def}}{=} (\Sigma, Q_1 \times Q_2, (i_1, i_2), F, \delta)$, où $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$, reconnaît :

- $L_1 \cap L_2$ si $F =$ ________________
- $L_1 \cup L_2$ si $F =$ ________________
- $L_1 \backslash L_2$ si $F =$ ________________

Remarques :

- $A_1 \times A_2$ simule les deux automates A_1 et A_2 en parallèle, sur chaque composante du couple.
- Là aussi, il faut considérer des automates déterministes complets.
- Si L_1 et L_2 sont sur deux alphabets différents Σ_1 et Σ_2, on peut toujours considérer $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
- On peut généraliser à une intersection et union finie de langages.

Exercice 10.
Donner un automate reconnaissant les mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ contenant un nombre pair de a et un nombre de b égal à 2 modulo 3.

VII États accessibles et co-accessibles

Définition : États accessibles et co-accessibles

Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ un automate et $q \in Q$.
1. q est accessible s'il existe un chemin depuis un état initial vers q.
2. q est co-accessible s'il existe un chemin depuis q vers un état final.

Exercice 11.
Décrire un algorithme en complexité linéaire pour déterminer les états accessibles et co-accessibles d'un automate.

Définition : Automate émondé

Un automate est émondé si tous ses états sont accessibles et co-accessibles.

Théorème

Tout automate est équivalent à un automate émondé.

Preuve : On peut supprimer les états inaccessibles et les états non co-accessibles, sans changer le langage reconnu.

Exercice 12.
Est-il vrai que tout automate est équivalent à un automate émondé déterministe complet ?

VIII Lemme de l'étoile

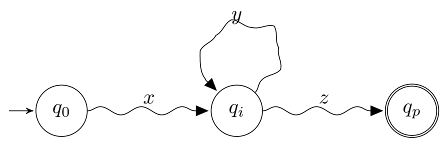
Théorème : Lemme de l'étoile ♡

Soit L un langage reconnaissable par un automate à n états.
Si $u \in L$ et $|u| \geq n$ alors il existe des mots x, y, z tels que :
- $u = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $y \neq \varepsilon$
- $xy^*z \subset L$ (c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N},\ xy^kz \in L$)

Preuve ♡:
Soit $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ un automate reconnaissant L et $n = |Q|$.
Soit $u \in L$ tel que $|u| \geq n$. u est donc l'étiquette d'un chemin acceptant C de la forme :

$$q_0 \in I \xrightarrow{u_0} q_1 \xrightarrow{u_1} ... \xrightarrow{u_{p-1}} q_p \in F$$

C possède $p+1 > n$ sommets donc passe deux fois par un même état $q_i = q_j$ avec $i < j < n$. La partie de C entre q_i et q_j forme donc un cycle :



Soit $x = u_0 u_1 ... u_{i-1}$, $y = u_i ... u_j$ et $z = u_{j+1} ... u_{p-1}$. Alors $xy^k z$ est l'étiquette du chemin acceptant obtenu à partir de C en passant k fois dans le cycle. D'où : $\forall k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$. □

Attention :

- La réciproque du lemme de l'étoile est fausse : on ne peut pas l'utiliser pour montrer qu'un langage est reconnaissable.
- La décomposition xyz est donnée par le lemme de l'étoile, on ne peut pas la choisir.

Schéma de preuve pour montrer qu'un langage L n'est pas reconnaissable :

- Supposons que L soit reconnaissable par un automate à n états.
- Soit $u = ... \in L$ tel que $|u| \geq n$.
- Soit $u = xyz$ la décomposition donnée par le lemme de l'étoile.
- On remarque que $xy^k z \notin L$ pour $k = ...$
- C'est absurde : L n'est pas reconnaissable.

Exercice 13.

1. Montrer que $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que $L_2 = \{a^n b^p \mid n \neq p\}$ n'est pas reconnaissable.