Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté, $n = |S|$ et $p = |A|$.

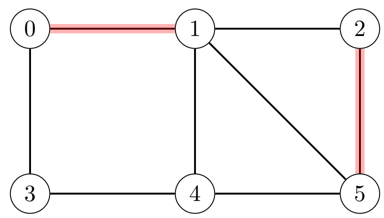
I Couplage

Définition : Couplage

- Un couplage de G est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à 2 arêtes de M :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

- Un sommet $v \in S$ est couvert par M s'il appartient à une arête de M. Sinon, v est libre pour M.



Un couplage dans un graphe

Exercice 1.
Écrire une fonction `est_couplage : int array array -> (int*int) list -> bool` déterminant si un ensemble d'arêtes forme un couplage d'un graphe.

Définition : Couplage maximum, parfait

Soit M un couplage de G.
- La taille $|M|$ de M est son nombre d'arêtes.
- M est un couplage maximum s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
- M est un couplage parfait si tout sommet de G appartient à une arête de M.

Remarque : en général, il n'y a pas unicité d'un couplage maximum ni d'un couplage parfait.

Exercice 2.
M est un couplage maximal s'il n'existe pas de couplage M' tel que $M \subsetneq M'$.

1. Quelle(s) implication(s) a t-on entre couplage maximum et couplage maximal ?
2. Donner un algorithme simple permettant d'obtenir un couplage maximal.

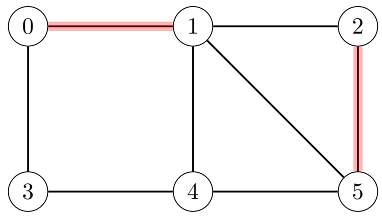
II Chemin augmentant

Définition : Chemin augmentant

Soit M un couplage de G.
- Un chemin est élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin élémentaire de G est M-alternant si ses arêtes sont alternativement dans M et dans $A \setminus M$.
- Un chemin de G est M-augmentant s'il est M-alternant et si ses extrémités sont libres pour M.

Remarque : un chemin augmentant contient un nombre pair de sommets et un nombre impair d'arêtes.

Exemple : $3 - 0 - 1 - 2 - 5 - 4$ est un chemin M-augmentant pour le couplage ci-dessous.



Définition : Différence symétrique

Si A et B sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

On a aussi $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$. C'est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B, mais pas aux deux.

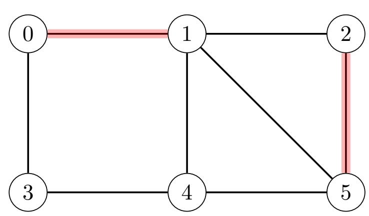
Théorème

Soit M un couplage de G et P un chemin M-augmentant dans G. Alors $M \Delta P$ est un couplage de G.

Preuve :

Remarque : $M \Delta P$ revient à échanger dans P les arêtes de M et les arêtes n'appartenant pas à M. Comme P est de taille impaire, on a donc $|M \Delta P| = |M| + 1$.

Exercice 3.
Dessiner $M \Delta P$ pour le couplage ci-dessous et le chemin $P = 3 - 0 - 1 - 4$.



Théorème

M est un couplage maximum de G si et seulement s'il n'existe pas de chemin M-augmentant dans G.

Preuve :

On en déduit l'algorithme suivant :

Couplage maximum par chemin augmentant

Entrée : Graphe $G = (S, A)$
Sortie : Couplage maximum M de G

$M \leftarrow \emptyset$
Tant que il existe un chemin M-augmentant P dans G **:**
  $M \leftarrow M \Delta P$
Renvoyer M

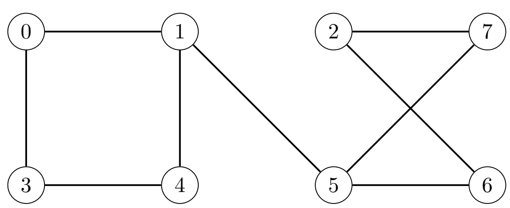
III Graphe biparti

On se restreint aux graphes bipartis dans lesquels il est plus facile de trouver un chemin augmentant.

Définition : Graphe biparti

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de A a une extrémité dans X et une extrémité dans Y.

Exercice 4.
Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.



Définition : Coloration

On appelle k-coloration de G une fonction $c : S \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que pour toute arête $\{u, v\} \in A$, on a $c(u) \neq c(v)$.

Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- G est biparti.
- G admet une 2-coloration.
- G n'a pas de cycle de longueur impair.

<u>Preuve</u> :

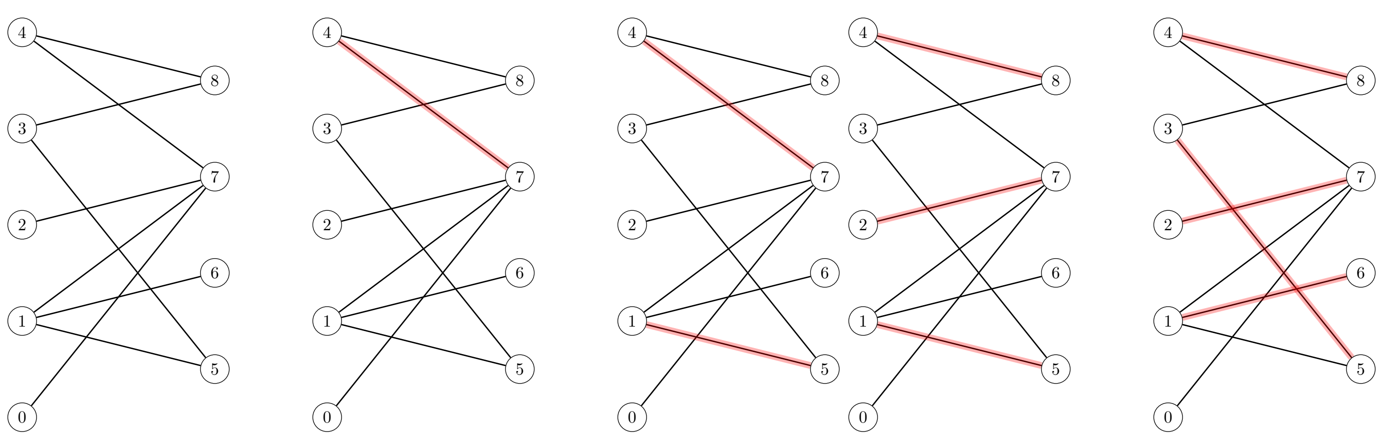
Exercice 5.
Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe est biparti, en complexité linéaire.

Pour trouver un chemin M-augmentant dans un graphe biparti G :

1. Partir d'un sommet libre.
2. Se déplacer en alternant entre des arêtes de M et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité (avec un parcours de graphe).
3. Si on arrive à un sommet libre alors on a trouvé un chemin M-augmentant.

Remarque : cette méthode est inefficace pour un graphe quelconque car dans un DFS depuis s, il faudrait distinguer deux chemins vers un sommet u (suivant que la dernière arête appartienne à M ou pas), ce qui donnerait 2^n chemins à considérer au total. Ce problème ne peut pas arriver dans un graphe biparti car il n'y a pas de cycle de longueur impaire.

Exemple de recherche d'un couplage maximum par chemin augmentant dans un graphe biparti :



Graphe biparti G et couplage $M = \emptyset$

$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 4 - 7$

$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 1 - 5$

$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 2 - 7 - 4 - 8$

$M \leftarrow M \Delta P$, où $P = 3 - 5 - 1 - 6$

Complexité de l'algorithme de couplage maximum par chemin augmentant dans un graphe biparti :

- Chaque recherche d'un chemin M-augmentant se fait par DFS en $\mathrm{O}(n + p)$.
- Il y a au plus p d'itération du « Tant que », car on ajoute une arête au couplage à chaque itération et qu'un couplage est de taille au plus p.

D'où une complexité totale $\mathrm{O}(p(n + p))$.