I Jeu à deux joueurs

Un puits est un sommet sans arête sortante (de degré sortant nul).

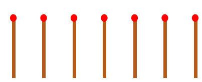
Définition : Jeu à deux joueurs

Un jeu à deux joueurs est un quadruplet (G, s_0, T_0, T_1) où :
- $G = (S, A)$ est un graphe orienté biparti tel que $S = S_0 \sqcup S_1$ et $A \subset S_0 \times S_1 \cup S_1 \times S_0$, où S_i est l'ensemble des configurations du jeu où c'est le joueur i qui doit jouer.
- $s_0 \in S$ est l'état initial.
- Pour $i \in \{0, 1\}$, $T_i \subset S$ est l'ensemble des puits qui sont les états gagnants pour le joueur i. On suppose $T_0 \cap T_1 = \emptyset$. On note T l'ensemble des puits de G, qu'on appelle aussi états finaux. Les états finaux qui ne sont pas des éléments de T_0 ni T_1 sont appelés états nuls.

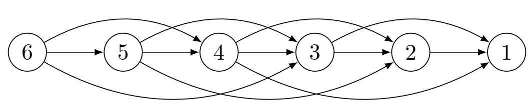
Les joueurs peuvent être nommés 0 et 1, A et B, Alice et Bob...

Exercice 1.
Montrer que tout graphe orienté acyclique possède un puits.

Exemple de modélisation (jeu de Nim) : Il y a initialement n allumettes. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 allumettes. Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu.

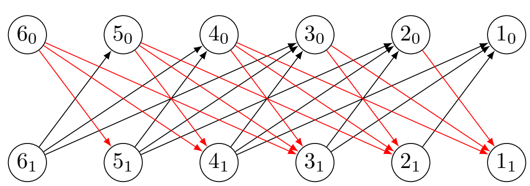


On peut représenter le jeu par un graphe où les sommets sont les configurations et les arêtes sont les coups possibles :



C'est un graphe acyclique, chaque chemin correspondant à une séquence de coups.

Pour caractériser parfaitement une situation de jeu, il faut savoir quel joueur doit jouer. On peut donc considérer le graphe biparti où les sommets sont dupliqués, pour chaque joueur :



II Stratégie

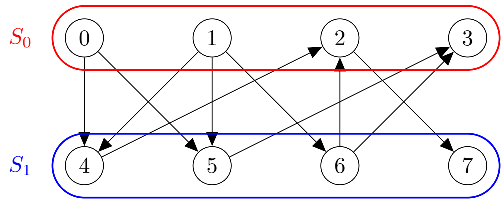
Définition : Partie, stratégie

- Une partie est un chemin d'un état initial vers un puits.
- Une stratégie pour le joueur i est une fonction $f : S_i \setminus T \to S_{1-i}$ telle que $\forall s \in S_i, (s, f(s)) \in A$.
- Une stratégie f pour le joueur i est gagnante si quelle que soit la stratégie g pour l'autre joueur $1 - i$, la partie obtenue en jouant alternativement avec les stratégies f et g aboutie en un état final gagnant pour le joueur i.

Remarques :

- Une stratégie pour le joueur i consiste à choisir, pour chaque position de S_i, le prochain coup à jouer.
- Une stratégie est sans mémoire : le choix du successeur ne dépend que de l'état actuel et pas du chemin suivi depuis l'état initial.

Exercice 2.
Donner une stratégie gagnante pour le joueur 0 dans le jeu ci-dessous (G, s_0, T_0, T_1) où $s_0 = 0$, $T_0 = \{7\}$, $T_1 = \{3\}$.



Exercice 3.
On considère le jeu de Nim avec initialement n allumettes et où le joueur 0 commence.

1. Montrer que si $n \equiv 1[4]$ alors le joueur 1 a une stratégie gagnante.
2. Montrer que si $n \not\equiv 1[4]$ alors le joueur 0 a une stratégie gagnante.

III Attracteurs

Définition : Attracteurs

Soit (G, s_0, T_0, T_1) un jeu à deux joueurs où $G = (S, A)$. Soit $s \in S$.
- s est une position gagnante pour le joueur i s'il existe une stratégie gagnante pour une partie qui commence en s (c'est-à-dire pour la partie (G, s, T_0, T_1)).
- L'attracteur $A(i)$ du joueur i est l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur i.

Exemple : dans le jeu de Nim, $A(0)$ est l'ensemble des configurations où il reste n allumettes avec $n \not\equiv 1[4]$.

Exercice 4.
Montrer que $A(0) \cap A(1) = \emptyset$.

On peut calculer l'attracteur $A(i)$ du joueur 0 par récurrence :

- Si $s \in S_i$ et qu'il existe $(s, t) \in A$ tel que $t \in A(i)$ alors $s \in A(i)$ (le joueur i peut choisir d'aller en t pour gagner).
- Si $s \in S_{1-i} \setminus T$ et que pour tout $(s, t) \in A$, $t \in A(i)$ alors $s \in A(i)$ (quel que soit le coup du joueur $1 - i$, il fera gagner le joueur i).

Définition : Calcul des attracteurs

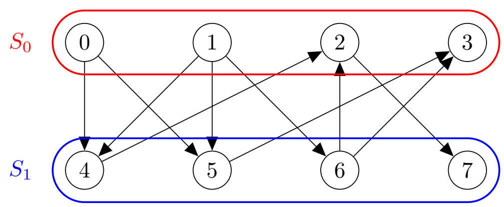
On définit par récurrence $A_n(i)$ pour $i \in \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$ par :
- $A_0(i) = T_i$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned} A_{n+1}(i) = A_n(i) &\cup \{s \in S_i \mid \exists t \in A_n(i), (s, t) \in A\} \\ &\cup \{s \in S_{1-i} \setminus T \mid \forall (s, t) \in A, t \in A_n(i)\} \end{aligned}$$

Théorème

$A_n(i)$ converge vers l'attracteur $A(i)$ du joueur i : il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $A_n(i) = A(i)$.

Preuve :

Exercice 5.
Calculer l'attracteur du joueur 0 pour le jeu ci-dessous (G, s_0, T_0, T_1) où $s_0 = 0$, $T_0 = \{7\}$, $T_1 = \{3\}$.



Une fois calculé $A(i)$ pour $i \in \{0, 1\}$, on peut définir une stratégie optimale f pour le joueur i :

- Si $s \in A(i)$, on considère le plus petit n tel que $s \in A_n(i)$ et on choisit $f(s)$ parmi les $t \in A_{n-1}(i)$ tels que $(s, t) \in A$.
- Sinon, on choisit $f(s)$ quelconque.

Théorème

f est une stratégie gagnante pour le joueur i si et seulement si $s_0 \in A(i)$. Dans ce cas, f permet au joueur i de gagner avec le nombre minimum de coups.

Exercice 6.
Soit (G, s_0, T_0, T_1) un jeu où il n'y a pas d'état nul ni de cycle. Montrer que $A(0) \cup A(1) = S$.

Remarque : Il existe donc une stratégie gagnante pour le joueur 0 ou le joueur 1.

Calcul des attracteurs en Python avec mémoïsation pour éviter de faire plusieurs appels récursifs sur la même configuration :

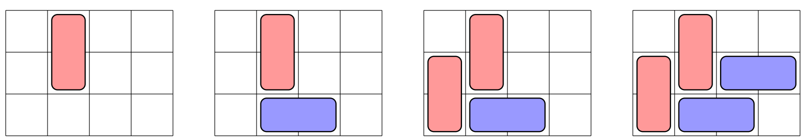
```python
def attracteurs(G, S0, T0):
    d = {} # d[v] = True si v est un attracteur
    def aux(v): # détermine si v est un attracteur
        if v not in d:
            voisins = [aux(w) for w in G[v]]
            if G[v] == []:
                d[v] = v in T0
            elif v in S0:
                d[v] = any(voisins) # il existe un true ?
            else:
                d[v] = all(voisins) # tous les éléments sont true ?
        return d[v]
    return [v for v in G if aux(v)]
```

Complexité : $O(|S| + |A|)$ avec des tables de hachage pour `d`, `S0` et `T0`. Le nombre de configurations $|S|$ peut être très grand.

IV Exemple : Jeu du domineering

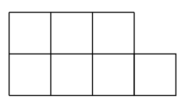
Le jeu du domineering est un jeu de plateau où le joueur 0 place un domino vertical et le joueur 1 un domino horizontal. Un joueur qui ne peut plus jouer perd.

Exemple de partie :



Exercice 7.

1. Dessiner le graphe des configurations pour le jeu de domineering sur le plateau ci-dessous. Il n'est pas nécessaire de dupliquer les configurations car on sait quel joueur doit joueur (en comptant le nombre de dominos).

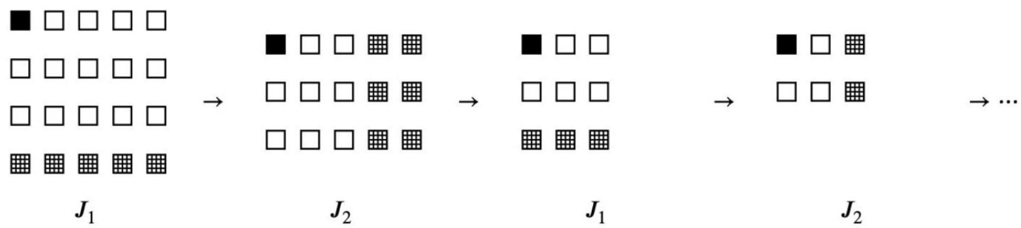


2. Montrer que le joueur 0 a une stratégie gagnante.
3. Trouver l'attracteur du joueur 0.

V Exercice CCINP : Jeu de Chomp

On considère une variante du jeu de Chomp : deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent autour d'une tablette de chocolat de taille $l \times c$, dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Les joueurs choisissent chacun leur tour une ou plusieurs lignes (ou une ou plusieurs colonnes) partant du bas (respectivement de la droite) et mangent les carrés correspondants. Il est interdit de manger le carré empoisonné et le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer.

Dans la figure ci-dessous, matérialisant un début de partie sur une tablette de taille 4×5, le carré noir est le carré empoisonné, le choix du joueur J_i est d'abord matérialisé par des carrés hachurés, qui sont ensuite supprimés.



On associe à ce jeu un graphe orienté $G = (S, A)$. Les sommets S sont les états possibles de la tablette de chocolat, définis par un couple $s = (m, n), m \in [\![1, l]\!], n \in [\![1, c]\!]$. De plus, $(s_i, s_j) \in A$ si un des joueurs peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i à l'état s_j. On dit que s_j est un successeur de s_i et que s_i est un prédécesseur de s_j.

1. Dessiner le graphe G pour $l = 2$ et $c = 3$. Les états de G pourront être représentés par des dessins de tablettes plutôt que par des couples (m, n).

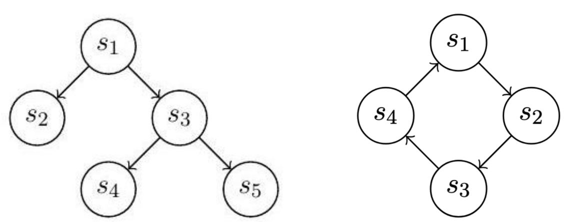
On va chercher à obtenir une stratégie gagnante pour le joueur J_1 par deux manières.

Utilisation des noyaux de graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que $N \subset S$ est un noyau de G si :

- pour tout sommet $s \in N$, les successeurs de s ne sont pas dans N,
- tout sommet $s \in S \backslash N$ possède au moins un successeur dans N

2. Donner tous les noyaux possibles pour les graphes suivants :



Dans la suite, on ne considère que des graphes acycliques.

3. Montrer que tout graphe acyclique admet un puits, c'est-à-dire un sommet sans successeur.

Dans le cas général, le noyau d'un graphe $G = (S, A)$ est souvent difficile à calculer. Si la dimension du jeu n'est pas trop importante, on peut toutefois le faire en utilisant l'algorithme suivant :

$N = \emptyset$
tant que il reste des sommets à traiter
    Chercher un sommet $s \in S$ sans successeur
    $N = N \bigcup \{s\}$
    Supprimer s de G ainsi que ses prédécesseurs

4. Justifier que cet algorithme termine et renvoie un noyau.

5. Démontrer que ce noyau est unique. Conclure que le graphe du jeu de Chomp possède un unique noyau N.

6. Appliquer cet algorithme pour calculer le noyau du jeu de Chomp à 2 lignes et 3 colonnes. Que peut-on dire du sommet $(1, 1)$ pour le joueur qui doit jouer ? En déduire à quoi correspondent les éléments du noyau.

7. Montrer que, dans le cas d'un graphe acyclique, tout joueur dont la position initiale n'est pas dans le noyau a une stratégie gagnante. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante pour ce jeu dans le cas $l = 2$ et $c = 3$?

Utilisation des attracteurs

On modélise le jeu par un graphe biparti. Pour ce faire, on dédouble les sommets du graphe précédent : un sommet s_i génère donc deux sommets s_i^1 et s_i^2, s_i^j étant le sommet i contrôlé par le joueur J_j. On forme alors deux ensembles de sommets $S_1 = \left\{s_i^1\right\}_i$ et $S_2 = \left\{s_i^2\right\}_i$, et on construit le graphe de jeu orienté $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. De plus, $\left(s_i^1, s_j^2\right) \in A$ si le joueur 1 peut, par son choix de jeu, faire passer la tablette de l'état s_i^1 à l'état s_j^2. On raisonne de même pour $\left(s_i^2, s_j^1\right) \in A$. On rappelle la définition d'un attracteur : soit F_1 l'ensemble des positions finales gagnantes pour J_1. On définit alors la suite d'ensembles $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $\mathcal{A}_0 = F_1$ et

$\forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{s \in S_1 / \exists t \in \mathcal{A}_i, (s,t) \in A\} \cup \{s \in S_2 \text{ non terminal}, \ \forall t \in S, (s,t) \in A \Rightarrow t \in \mathcal{A}_i\}$ et $\mathcal{A} = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ est l'attracteur pour J_1.

8. Que représente l'ensemble $\mathcal{A}_i$?
9. Dans le cas du jeu de Chomp à deux lignes et trois colonnes (question 1), calculer les ensembles $\mathcal{A}_i$. Le joueur J_1 a-t-il une stratégie gagnante? Comment le savoir à partir de $\mathcal{A}$?