Recherche d'un mot dans un texte

Quentin Fortier

March 16, 2026

Chaînes de caractères : en C

Une chaîne de caractères est un tableau dont les éléments sont des **char** (caractères) et terminée par le caractère spécial '\0' :

```
char s[] = "mpi"; // \0 est ajouté automatiquement
printf("%c", s[0]); // affiche le 1er caractère
s[2] = '2'; // modifie un caractère
strlen(s); // nombre de caractères
for(int i = 0; s[i] != '\0'; i++) // parcourir s
    ...
```

Chaînes de caractères : en OCaml

```
let s = "mpi"
s.[0] (* 1er caractère *)
s.[2] <- '2' (* ERREUR : un string est immutable en OCaml *)
let n = String.length s (* nombre de caractères *)
if s = "mp2i" then ... (* comparaison en O(n) *)
```

Recherche d'un mot dans un texte

Recherche d'un mot

Entrée : Deux mots `m` et `t`.

Sortie : `m` est-il un facteur de `t` ?

Applications :

1. Recherche d'une séquence ADN
2. Recherche dans un éditeur de texte (Visual Code...)
3. ...

Algorithme naïf

Recherche naïve de CGGCAG avec fenêtre glissante :

C	A	A	T	G	T	C	T	G	C	A	C	C	A	A	C	A	C	C	G	G	C	A	G

C G G C A G

Algorithme naïf

Recherche naïve de CGGCAG avec fenêtre glissante :

C	A	A	T	G	T	C	T	G	C	A	C	C	A	A	C	A	C	C	G	G	C	A	G

C G G C A G

Algorithme naïf

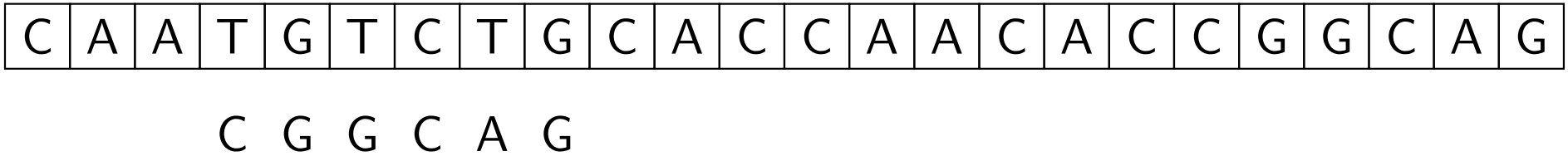
Recherche naïve de CGGCAG avec fenêtre glissante :

C	A	A	T	G	T	C	T	G	C	A	C	C	A	A	C	A	C	C	G	G	C	A	G

C G G C A G

Algorithme naïf

Recherche naïve de CGGCAG avec fenêtre glissante :



Algorithme naïf

```
bool is_substring(char* m, char* t) {
    int k = strlen(m), n = strlen(t);
    for(int i = 0; i < n - k + 1; i++)
        for(int j = 0; t[i + j] == m[j]; j++)
            if(j == k - 1)
                return true;
    return false;
}
```

Algorithme naïf

```
bool is_substring(char* m, char* t) {
    int k = strlen(m), n = strlen(t);
    for(int i = 0; i < n - k + 1; i++)
        for(int j = 0; t[i + j] == m[j]; j++)
            if(j == k - 1)
                return true;
    return false;
}
```

Complexité : $O(nk)$ où k est la taille de `m` et n la taille de `t`.

Algorithmes de recherche de facteur

On note $k = |m|$ et $n = |t|$.

Algorithme	Complexité	Prétraitement	Mémoire	Méthode
Naïf	$O(nk)$	0	0	Fenêtre glissante
Rabin-Karp	$O(n)$	0	0	Fonction de hachage
Boyer-Moore	$O(nk)$	$O(k)$	$O(k)$	Décalage
KMP	$O(n)$	$O(k)$	$O(k)$	Automate (2ème année)

La complexité de Rabin–Karp est donnée en moyenne (en raison de la complexité moyenne $O(1)$ des opérations sur les tables de hachage). Boyer–Moore est efficace en pratique.

Algorithme de Rabin-Karp

L'idée de Rabin-Karp est d'accélérer la comparaison du mot avec une fenêtre :

```
bool is_substring(char* m, char* t) {
    int k = strlen(m), n = strlen(t);
    for(int i = 0; i < n - k + 1; i++)
        for(int j = 0; t[i + j] == m[j]; j++) // ici
            if(j == k - 1)
                return true;
    return false;
}
```

Algorithme de Rabin-Karp

L'idée de Rabin-Karp est d'accélérer la comparaison du mot avec une fenêtre :

```
bool is_substring(char* m, char* t) {
    int k = strlen(m), n = strlen(t);
    for(int i = 0; i < n - k + 1; i++)
        for(int j = 0; t[i + j] == m[j]; j++) // ici
            if(j == k - 1)
                return true;
    return false;
}
```

Pour cela, il utilise une fonction de hachage et compare les hachages de chaque sous-chaîne.

Algorithme de Rabin-Karp

L'idée de Rabin-Karp est d'accélérer la comparaison du mot avec une fenêtre :

```
bool is_substring(char* m, char* t) {
    int k = strlen(m), n = strlen(t);
    for(int i = 0; i < n - k + 1; i++)
        for(int j = 0; t[i + j] == m[j]; j++) // ici
            if(j == k - 1)
                return true;
    return false;
}
```

Pour cela, il utilise une fonction de hachage et compare les hachages de chaque sous-chaîne.
Mais il faut être capable de calculer les hachages rapidement, ce qui va être réalisé avec un « hachage glissant », qui permet de déduire le hachage d'une fenêtre à partir de la fenêtre précédente.

Algorithme de Rabin-Karp

L'algorithme de Rabin-Karp utilise une fonction de hachage h rapide à calculer (si possible $O(1)$) et, pour chaque indice i de t :

- Compare $h(m)$ et $h(t[i : i + k])$.
- Si ces deux valeurs sont égales, on compare m et $t[i : i + k]$ lettre par lettre, en $O(k)$.

Ainsi, si $h(m) \neq h(t[i : i + k])$, on sait que $m \neq t[i : i + k]$ et on gagne du temps d'exécution.

Remarque : Comme h n'est *a priori* pas injective, il peut y avoir des collisions, c'est-à-dire $h(m) = h(t[i : i + k])$ et $m \neq t[i : i + k]$.

Algorithme de Rabin-Karp

Étant donné un mot $w = w_0 ... w_{k-1}$, un entier b (le nombre de caractères possibles) et un entier q, on définit $h(w) \in \{0, ..., q-1\}$ par :

$$h(w) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{code}(w_i) b^{k-1-i} \mod q$$

où $\text{code}(w_i)$ est le code de la lettre w_i (par exemple, le code ASCII).

Algorithme de Rabin-Karp

Calcul de la fonction de hachage :

```
let hash b q s =
  let rec aux i p =
    if i = -1 then 0
    else ((Char.code s.[i])*p + aux (i-1) ((p*b) mod q)) mod q in
  aux (String.length s - 1) 1
```

Algorithme de Rabin-Karp

```
let rabin_karp t w =
  let k, n = String.length w, String.length t in
  let q = 3719 in (* nombre premier pour le modulo *)
  let b = 256 in (* nombre de caractères (base) *)
  let p = pow b (k - 1) q in (* b^(k-1) mod q *)
  let h_w = hash b q w in
  let rec search i h =
    if h = h_w && w = String.sub t i k then i
    else if i >= n - k then -1
    else let h_ = (b*(h - p*Char.code t.[i]) + Char.code t.[i + k]
      search (i + 1) (if h_ >= 0 then h_  else h_ + q) in
  search 0 (hash b q (String.sub t 0 k))
```

`pow a n q` renvoie $a^n \mod q$.

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

1. Prétraitement : On utilise un dictionnaire `d` tel que `d[c]` soit l'indice de la première apparition de `c` dans `m`.
   Exemple : si `w = "CGGCAG"` alors `d` a les associations `('A', 1), ('C', 2), ('G', 3)` et `'T'` n'est pas une clé de `d`.

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

1. Prétraitement : On utilise un dictionnaire `d` tel que `d[c]` soit l'indice de la première apparition de `c` dans `m`.
   Exemple : si `w = "CGGCAG"` alors `d` a les associations `('A', 1), ('C', 2), ('G', 3)` et `'T'` n'est pas une clé de `d`.
2. L'algorithme considère alors les lettres de t et les compare aux lettres de m, de droite à gauche. Dès qu'il y a une différence, on décale d'un nombre de caractères donné par `d` et on reprend la comparaison du début.

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

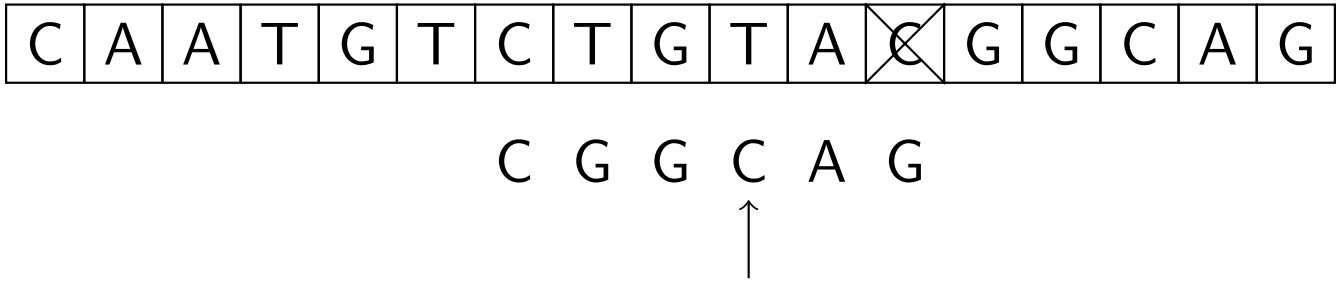
Recherche de CGGCAG :

C G G C A G

T n'apparaît pas dans le mot : on décale de k

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

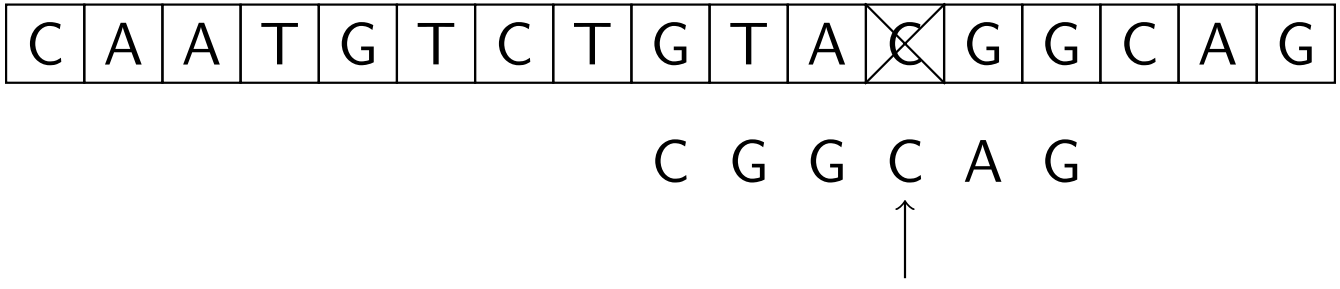
Recherche de CGGCAG :



La dernière lettre ne correspond pas : on décale de 2 pour avoir un C

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

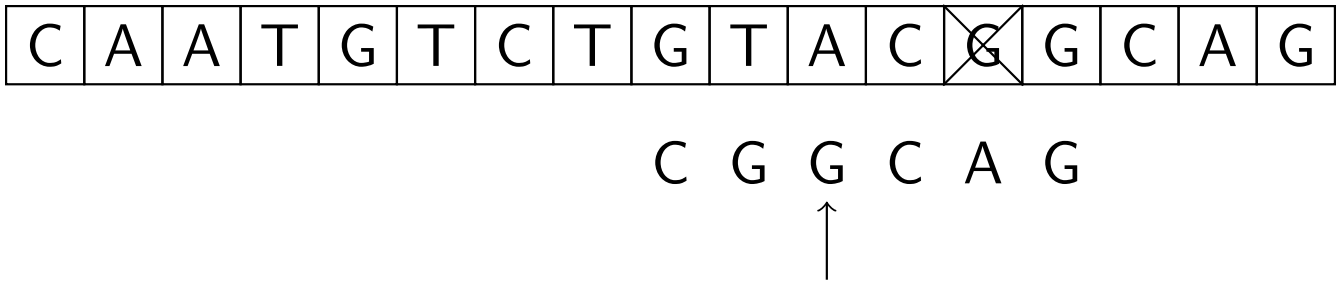
Recherche de CGGCAG :



La dernière lettre ne correspond pas : on décale de 2 pour avoir un C

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

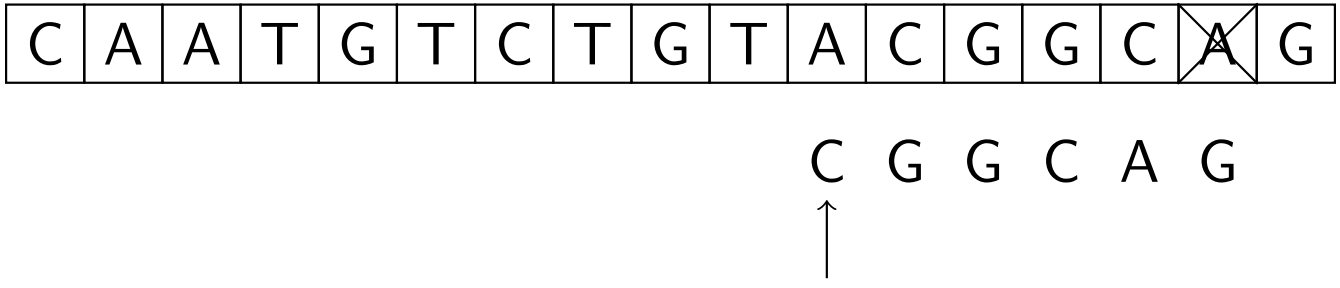
Recherche de CGGCAG :



L'avant-dernière lettre ne correspond pas : on décale de 2 pour avoir un G

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

Recherche de CGGCAG :



La dernière lettre ne correspond pas : on décale de 1 pour avoir un A

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

Recherche de CGGCAG :

C	A	A	T	G	T	C	T	G	T	A	C	G	G	C	A	G
											C	G	G	C	A	G

On a trouvé le mot !

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

```
let boyer_moore_horspool t w =
    let k, n = String.length w, String.length t in
    let module M = Map.Make(Char) in
    let rec make_d i =
        if i = k then M.empty
        else make_d (i+1) |> M.add w.[k - i - 1] i in
    let d = make_d 1 in

    let rec search i j = (* teste si w[:k-j] = t[i-k:i-j] *)
        if i >= n then -1
        else if j = k then i - k + 1
        else if w.[k - j - 1] = t.[i - j] then search i (j + 1)
        else match M.find_opt t.[i - j] d with
            | Some s -> search (s + i) 0
            | None -> search (i + k - j) 0 in
    search (k - 1) 0
```

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool

Où on a utilisé le module `Map` qui implémente un dictionnaire persistant (par arbre binaire de recherche) :

```
let module M = Map.Make(Char) (* dictionnaire dont les clés sont d
let d = M.empty (* dictionnaire vide *)
let d2 = M.add 'a' 1 d (* ajoute une clé 'a' avec valeur 1 *)
M.find_opt 'a' d2 (* renvoie Some 1 *)
M.find_opt 'b' d2 (* renvoie None *)
```

Algorithme de Boyer-Moore-Horspool : Complexité

Exercice

1. Quelle est la complexité de Boyer-Moore-Horspool dans le meilleur cas ?
2. Montrer que l'algorithme de Boyer-Moore-Horspool a une complexité en $\Theta(nk)$ dans le pire des cas.