Plus courts chemins et algorithme A*

Quentin Fortier

April 5, 2025

Généralités

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, pondéré par $p : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note $n = |S|$ et $p = |A|$.

Définition

Soient $u, v \in S$.

- Un chemin de u à v est une suite de sommets $u = u_0, u_1, \ldots, u_k = v$ telle que $\forall i \in \{0, ..., k-1\}$, $(u_i, u_{i+1}) \in A$.
- Le poids d'un chemin C, noté $p(C)$, est la somme des poids de ses arêtes.
- Un chemin de u à v est un plus court chemin s'il n'existe pas de chemin de u à v de poids plus petit.
- La distance $d(u, v)$ est le poids d'un plus court chemin de u à v.
  Autrement dit : $d(u, v) = \inf\{p(C) \mid C \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$.
  S'il n'existe pas de chemin de u à v, on pose $d(u, v) = +\infty$.
  S'il y a un cycle de poids négatif, on peut avoir $d(u, v) = -\infty$.

Généralités

Problème 1

Entrée : Graphe orienté $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Problème 2

Entrée : Graphe non-orienté $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Théorème

Supposons que l'on puisse résoudre le problème 1 en complexité $O(f(n, p))$.
Alors on peut résoudre le problème 2 en complexité $O(f(n, p))$.

Généralités

Inégalité triangulaire

Si $u, v, w \in S$, alors : $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Sous-optimalité

Soit C un plus court chemin de u à v et u', v' deux sommets de C. Alors le sous-chemin C' de C de u' à v' est aussi un plus court chemin.

Généralités

Lemme

Soient $u, v, w \in S$. Alors :

$$d(u, v) = \min_{(w,v) \in A} d(u, w) + p(w, v)$$

Remarques :

- Cette équation n'est pas utilisable en l'état car calculer $d(u, v)$ est aussi difficile que calculer $d(u, w)$.
- Pour la rendre utilisable, on peut ajouter un paramètre supplémentaire : nombre d'arêtes (Bellman-Ford) ou numéros des sommets utilisables (Floyd-Warshall).

Généralités

Entrée : Graphe orienté $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}$,
$s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Pour retrouver les plus courts chemins, on peut conserver un tableau `pere` tel que `pere[v]` contient le prédécesseur de v dans un plus court chemin de s à v.

Parcours en largeur

Un parcours en largeur permet de résoudre le problème suivant :

Entrée : $G = (S, A)$ avec des poids unitaires, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Complexité :

- $\mathrm{O}(n + p)$ si G est représenté par une liste d'adjacence
- $\mathrm{O}(n^2)$ si G est représenté par une matrice d'adjacence

```c
int* bfs(int s, int n, int** g) {
// g est une matrice d'adjacence avec n sommets
    int* d = malloc(n * sizeof(int));
    for(int i = 0; i < n; i++) d[i] = -1;
    d[s] = 0;
    int* q = malloc(n * sizeof(int)); // file
    int deb = 0, fin = 1;
    q[fin] = s;
    while (deb < fin) {
        int u = q[deb++];
        for(int v = 0; v < n; v++)
            if(g[u][v] && d[v] == -1) {
                d[v] = d[u] + 1;
                q[fin++] = v;
            }
    }
    free(q);
    return d;
}
```

Graphe orienté acyclique (HP)

Entrée : $G = (S, A)$ acyclique et $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Résolution en $\mathrm{O}(n + p)$:

1. Calculer un tri topologique des sommets avec l'inverse d'un parcours postfixe.
2. Calculer les distances dans l'ordre topologique, en utilisant :

$$d(s, v) = \min_{(u,v) \in A} d(s, u) + p(u, v)$$

Remarque : On ne peut pas utiliser cette dernière formule si G contient des cycles.

```c
int* sp_dag(int s, int** g, int n) {
// g[i][j] = poids de l'arc i -> j ou 0 si pas d'arc
    int* d = malloc(n * sizeof(int));
    for(int i = 0; i < n; i++) d[i] = -1;
    d[s] = 0;
    int* tri = tri_topologique(g, n);
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        int v = tri[i];
        for(int j = 0; j < i; j++) {
            int u = tri[j];
            if(g[u][v] && (d[v] == -1 || d[v] > d[u] + g[u][v]))
                d[v] = d[u] + g[u][v];
        }
    free(ordre);
    return d;
}
```

Algorithme de Dijkstra

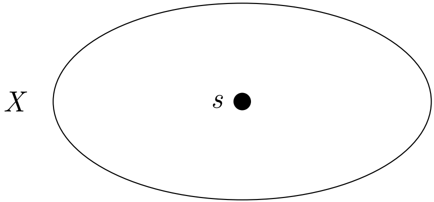
L'algorithme de Dijkstra permet de résoudre le problème suivant :

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Algorithme de Dijkstra

Idée : Calculer les distances par ordre croissant depuis s.

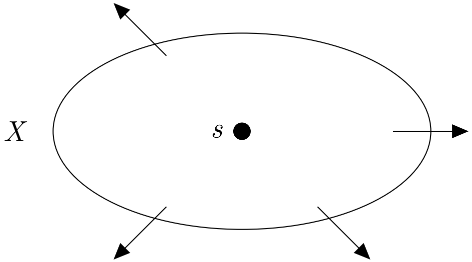
Soit $X \subset S$ l'ensemble des sommets de distance connue.



Algorithme de Dijkstra

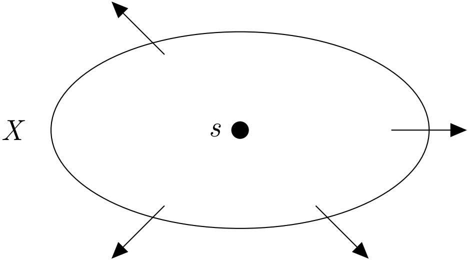
<u>Idée</u> : Calculer les distances par ordre croissant depuis s.

Soit $X \subset S$ l'ensemble des sommets de distance connue.



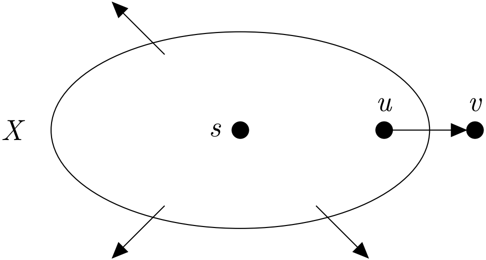
À chaque étape, on déduit la distance à un nouveau sommet (qu'on ajoute à X).

Algorithme de Dijkstra



Soit $(u, v) \in A$ tel que $v \notin X$ et $d(s, u) + p(u, v)$ est minimum.

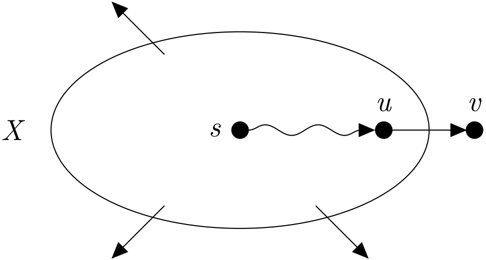
Algorithme de Dijkstra



Soit $(u, v) \in A$ tel que $v \notin X$ et $d(s, u) + p(u, v)$ est minimum.
Alors :

$$\boxed{d(s, v) = d(s, u) + p(u, v)}$$

Algorithme de Dijkstra



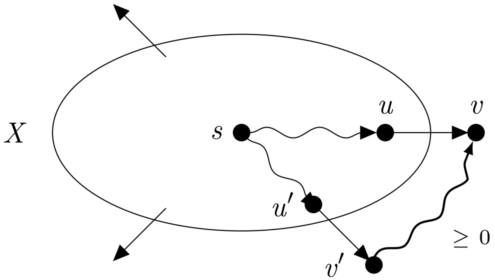
Soit $(u, v) \in A$ tel que $v \notin X$ et $d(s, u) + p(u, v)$ est minimum.
Alors :

$$\boxed{d(s, v) = d(s, u) + p(u, v)}$$

Preuve :

1. Il existe un chemin de longueur $d(s, u) + p(u, v)$.

Algorithme de Dijkstra



Soit $(u, v) \in A$ tel que $v \notin X$ et $d(s, u) + p(u, v)$ est minimum.
Alors :

$$\boxed{d(s, v) = d(s, u) + p(u, v)}$$

Preuve :

2. Un chemin C de s à v doit sortir de X avec un arc (u', v').
   Comme les poids sont ≥ 0 :

$$p(C) \geq d(s, u') + p(u', v') \geq d(s, u) + p(u, v)$$

Algorithme de Dijkstra

On stocke les sommets restants à visiter dans `q` ($= \overline{X}$) et on conserve un tableau `d` des distances estimées avec l'invariant de boucle suivant :

1. $\forall v \notin$ `q` : `d[v]` $= d(s, v)$.
2. $\forall v \in$ `q` : `d[v]` $= \min\limits_{u \notin q} d(s, u) + p(u, v)$.

Algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra

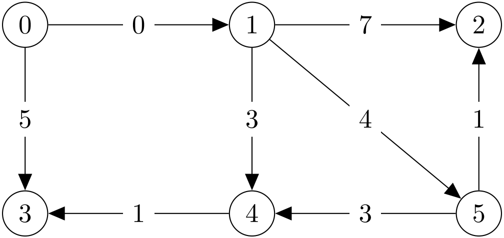
Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

`q` $\leftarrow$ file de priorité contenant tous les sommets
`d` $\leftarrow [\infty, ..., \infty]$
`d[s]` $\leftarrow 0$
Tant que `q` $\neq \emptyset$ **:**
  Extraire `u` de `q` tel que `d[u]` soit minimum
  Pour tout voisin `v` de `u` **:**
    Si `d[u] + p(u, v) < d[v]` **:**
      `d[v]` $\leftarrow$ `d[u] + p(u, v)`
Renvoyer `d`

Algorithme de Dijkstra

Exercice

Appliquer l'algorithme de Dijkstra depuis $s = 0$ sur le graphe suivant, en mettant à jour les valeurs `d[v]` à côté de chaque sommet `v` :



Algorithme de Dijkstra

Complexité de Dijkstra si $\mathtt{q}$ est implémenté par un tas :

Algorithme de Dijkstra

Complexité de Dijkstra si q est implémenté par un tas :

1. n extractions du minimum : $\mathsf{O}(n\log(n))$
2. au plus p mises à jour : $\mathsf{O}(p\log(n))$

Total : $\mathsf{O}(n\log(n)) + \mathsf{O}(p\log(n)) = \boxed{\mathsf{O}(p\log(n))}$.

Algorithme de Dijkstra

On suppose avoir une file de priorité min avec les fonctions suivantes :

```
(* create () renvoie une file de priorité vide *)
create : unit -> 'a priority_queue

(* add q e p ajout e avec priorité p dans q *)
add : 'a priority_queue -> 'a -> int -> unit

(* empty q détermine si q est vide *)
empty : 'a priority_queue -> bool

(* extract_min q extrait l'élément de q de priorité minimum *)
extract_min : 'a priority_queue -> 'a * int
```

Algorithme de Dijkstra

Problème : si on veut implémenter la file de priorité avec un tas, la fonction de mise à jour d'un élément dans un tas demande de connaître l'indice de l'élément à modifier.
Il faudrait maintenir un tableau qui donne l'indice (dans le tas) d'un sommet. C'est fastidieux.

Algorithme de Dijkstra

Problème : si on veut implémenter la file de priorité avec un tas, la fonction de mise à jour d'un élément dans un tas demande de connaître l'indice de l'élément à modifier.
Il faudrait maintenir un tableau qui donne l'indice (dans le tas) d'un sommet. C'est fastidieux.

Solution plus simple : ajouter des couples (distance estimée de `v`, `v`) sans jamais mettre à jour les éléments de la file de priorité (qui peut donc contenir plusieurs fois le même sommet).

Algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

```
q ← file de priorité vide
Ajouter s à q avec priorité 0
d ← [∞, ..., ∞]
d[s] ← 0
Tant que q ≠ ∅ :
    Extraire u de q avec priorité minimum du
    Si d[u] = ∞ :
        d[u] ← du
        Pour tout voisin v de u :
            Ajouter v à q avec priorité du + p(u, v)
Renvoyer d
```

Algorithme de Dijkstra

```
let dijkstra g p s =
  let n = Array.length g in
  let q = create () in
  let d = Array.make n max_int in
  add q s 0;
  while not (is_empty q) do
    let u, du = extract_min q in
    if d.(u) = max_int then (
        d.(u) <- du;
        List.iter (fun v -> add q v (du + p u v)) g.(u)
    )
  done;
  d
```

Algorithme A*

Souvent, on ne cherche pas les plus courts chemins à tous les autres sommets, mais seulement à un autre sommet fixé.

Exemples :

- GPS : Trouver un chemin le plus court d'une ville à une autre.
- Jeu vidéo : Déplacer un personnage d'un point à un autre.

Algorithme A*

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s \in S$, $t \in S$
Sortie : La distance $d(s, t)$ de s à t

<u>Principe de l'algorithme A*</u> :

1. Définir une heuristique h telle que $h(v)$ soit une estimation de la distance de v à t.
2. Modifier l'algorithme de Dijkstra en utilisant `d[u] + p(u, v) + h(v)` comme priorité, au lieu de `d[u] + p(u, v)`.

L'algorithme A* visite donc en priorité les sommets v tels que $h(v)$ est petit.

Algorithme A*

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}^+$, $s, t \in S$ et
$h : S \to \mathbb{R}^+$ une heuristique cohérente
Sortie : La distance $d(s, t)$ de s à t

```
q ← file de priorité vide
Ajouter s à q avec priorité 0
d ← [∞, ..., ∞]
Tant que d[t] = ∞ :
    Extraire u de q de priorité minimum du
    Si d[u] = ∞ :
        d[u] ← du
        Pour tout voisin v de u :
            Ajouter v à q avec priorité
             d[u] + p(u, v) + h(v)
Renvoyer d[t]
```

Algorithme A*

Définition

Une heuristique h est dite :

- Admissible si $h(v) \leq d(v, t)$ pour tout $v \in S$.
- Cohérente (ou : monotone) si $h(v) \leq p(u, v) + h(u)$ pour tout $(u, v) \in A$.

Algorithme A*

Définition

Une heuristique h est dite :

- Admissible si $h(v) \leq d(v, t)$ pour tout $v \in S$.
- Cohérente (ou : monotone) si $h(v) \leq p(u, v) + h(u)$ pour tout $(u, v) \in A$.

Théorème (admis)

- Si h est admissible alors A* renvoie la distance de s à t.
- Si h est admissible et cohérente et si la file de priorité q est implémentée avec un tas, alors A* renvoie la distance de s à t en complexité $\mathrm{O}(p \log(n))$.

On n'a donc théoriquement rien gagné en complexité par rapport à Dijkstra, mais en choisissant bien h on peut réduire le nombre de sommets explorés en pratique.

Algorithme A^*

Idéalement, une heuristique doit être rapide à calculer ($O(1)$), admissible, cohérente et proche de la distance réelle (ce qui permet de se rapprocher plus rapidement de t).

Algorithme A*

Idéalement, une heuristique doit être rapide à calculer (O(1)), admissible, cohérente et proche de la distance réelle (ce qui permet de se rapprocher plus rapidement de t).

Exemples :

- $h = 0$: on retrouve l'algorithme de Dijkstra.
- $h : v \to d(v, t)$: on parcourt exactement le plus court chemin de s à t mais on ne connaît pas $d(v, t)$ (c'est ce qu'on cherche).
- Distance euclidienne : si $v, t \subset \mathbb{R}^k$, $h(v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (v_i - t_i)^2}$.
- Distance de Manhattan : si $v, t \subset \mathbb{R}^k$, $h(v) = \sum_{i=1}^{k} |v_i - t_i|$.

Algorithme A*

Exercice

Montrer que l'algorithme A* ne renvoie pas nécessairement la distance de s à t si h n'est pas admissible.

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

L'algorithme de Bellman-Ford permet de résoudre le problème suivant par programmation dynamique :

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Équation de Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de s à v utilisant au plus k arêtes. Alors :

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

L'algorithme de Bellman-Ford permet de résoudre le problème suivant par programmation dynamique :

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}$, $s \in S$
Sortie : Tableau `d` tel que `d[v]` $= d(s, v)$

Équation de Bellman-Ford

Soit $d_k(v)$ le poids minimum d'un chemin de s à v utilisant au plus k arêtes. Alors :

$$d_{k+1}(v) = \min_{(u,v) \in A} d_k(u) + p(u, v)$$

Si G ne contient pas de cycle de poids négatif alors $d_{n-1}(v) = d(v)$.

Remarque : on peut détecter un cycle de poids négatif en testant si $d_n(v) < d_{n-1}(v)$.

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

Algorithme de Bellman-Ford

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par p et $s \in S$.
Sortie : d tel que $d[v]$ soit la distance de s à v.

Initialiser $d[s][k] = 0$ et $d[v][k] = \infty$ pour $v \neq s$
Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ **:**
    Pour $v \in V$ **:**
        Pour $(u, v) \in A$ **:**
            $d[v][k+1] = \texttt{min}(d[v][k+1], d[u][k] + p(u, v))$
Renvoyer d

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

Parcourir tous les sommets puis tous les arcs (`u`, `v`) entrants dans `v` revient à parcourir tous les arcs du graphe :

Algorithme de Bellman-Ford

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par p et $s \in S$.
Sortie : d tel que $d[v]$ soit la distance de s à v.

Initialiser $d[s][k] = 0$ et $d[v][k] = \infty$ pour $v \neq s$
Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ **:**
  Pour $v \in V$ **:**
    Pour $(u, v) \in A$ **:**
      $d[v][k+1] = \texttt{min}(d[v][k+1], d[u][k] + p(u, v))$
Renvoyer d

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

Comme on a juste besoin de stocker $d[...][k-1]$ pour calculer $d[...][k]$:

Algorithme de Bellman-Ford

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par p et $s \in S$.
Sortie : `d` tel que `d[v]` soit la distance de s à v.

`d` $\leftarrow [\infty, ..., \infty]$
`d[s]` $\leftarrow 0$
Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ **:**
  Pour $(u, v) \in A$ **:**
    `d[s]` $\leftarrow$ `min(d[v], d[u] + p(u, v))`
Renvoyer `d`

Complexité : $\mathrm{O}(np)$ si G est représenté par une liste d'adjacence.

Algorithme de Bellman-Ford (HP)

```c
int* bellman_ford(int s, int** g, int n) {
// g[i][j] = p si (i, j) est un arc de poids p, infini sinon
    int* d = malloc(n * sizeof(int));
    for(int i = 0; i < n; i++) d[i] = i == s ? 0 : -1;
    for(int k = 0; k < n - 1; k++)
        for(int u = 0; u < n; u++)
            for(int v = 0; v < n; v++) {
                int x = d[u] + g[u][v];
                if(g[u][v] != 0 && (d[v] == -1 || d[v] > x))
                    d[v] = x;
            }
    return d;
}
```

Algorithme de Floyd-Warshall

L'algorithme de Floyd-Warshall permet de résoudre le problème suivant par programmation dynamique :

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par $p : A \to \mathbb{R}$
Sortie : Matrice `d` telle que `d[u][v]` $=$ distance de u à v

Remarque : Contrairement aux autres algorithmes, Floyd-Warshall calcule les distances depuis n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet.

Algorithme de Floyd-Warshall

Équation de Floyd-Warshall

Soit $d_k(v)$ $d_k(u, v)$ la longueur d'un plus court chemin de u à v n'utilisant que des sommets intermédiaires de numéro $< k$ (∞ s'il n'existe pas). Alors :

Algorithme de Floyd-Warshall

Équation de Floyd-Warshall

Soit $d_k(v)$ $d_k(u,v)$ la longueur d'un plus court chemin de u à v n'utilisant que des sommets intermédiaires de numéro $< k$ (∞ s'il n'existe pas). Alors :

$$d_{k+1}(u,v) = \mathtt{min}(d_k(u,v), d_k(u,k) + d_k(k,v))$$

Si G ne contient pas de cycle de poids négatif alors $d_n(u,v) = d(u,v)$.

Algorithme de Floyd-Warshall

Équation de Floyd-Warshall

Soit $d_k(v)$ $d_k(u, v)$ la longueur d'un plus court chemin de u à v n'utilisant que des sommets intermédiaires de numéro $< k$ (∞ s'il n'existe pas). Alors :

$$d_{k+1}(u, v) = \texttt{min}(d_k(u, v), d_k(u, k) + d_k(k, v))$$

Si G ne contient pas de cycle de poids négatif alors $d_n(u, v) = d(u, v)$.

Remarques :

- Comme pour Bellman-Ford, on peut utiliser une matrice $d[u][v]$ pour stocker la dernière valeur calculée de $d_k(u, v)$.
- On peut détecter un cycle de poids négatif en testant s'il existe u tel que $d_n(u, u) < 0$.
- Si G est représenté par matrice d'adjacence pondérée, on peut l'utiliser pour stocker $d_k(u, v)$ et initialiser $d_0(u, v)$.

Algorithme de Floyd-Warshall

Algorithme de Floyd-Warshall

Entrée : $G = (S, A)$ pondéré par p
Sortie : Matrice `d` telle que `d[u][v]` $=$ distance de u à v

Initialiser `d[u][v]` à 0 si $u = v$ et à $p(u, v)$ sinon

Pour $k \in S$ **:**
    Pour $u \in S$ **:**
        Pour $v \in S$ **:**
            $d[u][v] = \texttt{min}(d[u][v], d[u][k] + d[k][v])$

Renvoyer `d`

Complexité : $\mathrm{O}(n^3)$ si G est représenté par une matrice d'adjacence.

Algorithme de Floyd-Warshall

Si G est représenté par matrice d'adjacence pondérée, on peut l'utiliser pour stocker $d_k(u, v)$ et initialiser $d_0(u, v)$:

```c
void floyd_warshall(int n, int** g, int n) {
// g[i][j] = p si (i, j) est un arc de poids p, infini sinon
    for(int k = 0; k < n; k++)
        for(int u = 0; u < n; u++)
            for(int v = 0; v < n; v++) {
                int x = g[u][k] + g[k][v];
                if(x < g[u][v])
                    g[u][v] = x;
            }
}
```