I Sous-graphe le plus dense

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté à n sommets et p arêtes. Pour $S' \subseteq S$, on définit la fonction de densité par :

$$\rho(S') = \frac{|A(S')|}{|S'|}$$

où $A(S')$ est l'ensemble des arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S'.

1. Quelles sont les valeurs minimum et maximum de $\rho(S')$, en fonction de $|S'|$?

On s'intéresse aux problèmes suivants :

DENSE

Entrée : un graphe $G = (S, A)$.
Sortie : un ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\rho(S')$ soit maximum.

DENSE-DEC

Entrée : un graphe $G = (S, A)$, un entier k et un réel α.
Sortie : existe t-il un ensemble $S' \subseteq S$ tel que $|S'| = k$ et $\rho(S') \geq \alpha$?

CLIQUE-DEC

Entrée : un graphe $G = (S, A)$ et un entier k.
Sortie : existe t-il une clique de taille k ($S' \subseteq S$ tel que $|S'| = k$ et tous les sommets de S' sont adjacents) ?

2. En admettant que CLIQUE-DEC est NP-complet, montrer que DENSE-DEC est NP-complet.

On propose un algorithme glouton pour DENSE :

- Itérativement retirer un sommet de degré minimum (ainsi que toutes les arêtes adjacentes) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommet.
- À chacune de ces itérations, calculer la valeur de ρ et conserver le maximum.

3. Expliquer comment on pourrait implémenter cet algorithme en complexité temporelle $O(n + p)$.

Soit S'^* tel que $\rho(S'^*)$ soit maximum, $v^* \in S'^*$ le premier sommet de S'^* retiré par l'algorithme glouton et S'' l'ensemble des sommets restants juste avant de retirer v^*.

4. Montrer que $\rho(S'') \geq \frac{\deg_{S''}(v^*)}{2}$, où $\deg_{S''}(v^*)$ est le degré de v^* dans S''.
5. Justifier que $\rho(S'^*) \geq \rho(S'^* \setminus \{v^*\})$.
6. En déduire que $\deg_{S'^*}(v^*) \geq \rho(S'^*)$.
7. En déduire que l'algorithme glouton est une 2-approximation pour DENSE.

II Ensemble dominant

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble dominant de G est un sous-ensemble D de V tel que tout sommet de V est soit dans D, soit adjacent à un sommet de D.
On note $d(G)$ la taille d'un plus petit ensemble dominant de G.

1. Calculer $d(G)$ si G est un chemin à n sommets.
2. On suppose que G est connexe et contient au moins 2 sommets. Montrer que $d(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
3. On suppose que G ne contient pas de sommet isolé (sommet de degré 0). Montrer que $d(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Une couverture par sommets de G est un sous-ensemble C de V tel que toute arête de G ait au moins une extrémité dans C.
On s'intéresse aux problèmes suivants :

DOMINANT

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
Sortie : G possède-t-il un ensemble dominant de taille k ?

COUVERTURE

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
Sortie : G possède-t-il une couverture par sommets de taille k ?

4. Soit G un graphe sans sommet isolé. Est-ce qu'une couverture par sommets est un ensemble dominant ? Et réciproquement ?
5. On admet que COUVERTURE est NP-complet. Montrer que DOMINANT est NP-complet.
6. Décrire un algorithme efficace pour résoudre DOMINANT si G est un arbre. L'implémenter en OCaml.

III k-Centres

k-CENTRES

Instance : un entier k et un graphe complet pondéré et non orienté $G = (S, A, d)$ dont les distances (poids) vérifient l'inégalité triangulaire $(d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, u))$
Solution : un sous-ensemble $S \subseteq S$ de cardinal k
Optimisation : minimiser $r = \max_{v \in S} \min_{s \in S} d(v, s)$.

Si l'on considère le cas particulier où les sommets du graphe sont des points du plan et le poids $d(u, v)$ est la distance euclidienne entre u et v, on demande donc de recouvrir S par k cercles de même rayon r centrés en k points de S, en minimisant r.

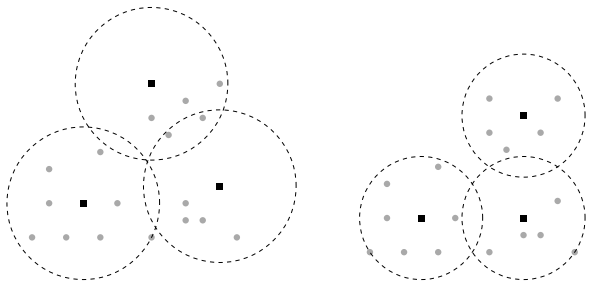

Figure 1: Une instance pour $k = 3$, avec deux solutions (la deuxième est meilleure).

On considère l'algorithme glouton suivant :

Choisir x un sommet quelconque
$C \leftarrow \{x\}$
Pour $i = 1$ à $k - 1$ **:**
  Choisir y tel que $\min_{c \in C} d(y, c)$ soit maximal.
  $C \leftarrow C \cup \{y\}$
return C

On souhaite montrer que cet algorithme fournit une 2-approximation. On note C, r l'ensemble des centres et le rayon correspondant renvoyés par l'algorithme glouton et C^*, r^* une solution optimale.

1. Soit r la distance maximum d'un point à un centre en fin d'algorithme, u un point réalisant ce maximum et $S = C \cup \{u\}$. Montrer qu'il existe $c_0 \in C^*$ et deux éléments distincts x et y de S tels que $d(x, c_0) \leq r^*$ et $d(y, c_0) \leq r^*$.
2. Conclure.