

I Typage OCaml

On souhaite formaliser le typage OCaml. Pour cela, on notera $\Gamma \vdash e : \tau$ si l'expression OCaml e est typée par le type τ et on utilisera les règles suivantes :

$$\begin{array}{lll} \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \quad (1) & \frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \quad (2) & \frac{n \in \mathbb{N}}{\Gamma \vdash n : \text{int}} \quad (3) \\ \frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad (4) & \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \text{fun } x \rightarrow e : \sigma \rightarrow \tau} \quad (5) & \frac{\Gamma \vdash f : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash f e : \tau} \quad (6) \end{array}$$

1. Soit $\Gamma = \{f : a \rightarrow (b \rightarrow a), g : b \rightarrow a\}$. Montrer $\Gamma \vdash \text{fun } x \rightarrow f (g x) x : \tau$ pour un certain type τ à déterminer.
2. Quelles analogies peut-on faire entre le typage OCaml et la déduction naturelle ?
3. Montrer que $(\text{fun } g \rightarrow g 1 2) (\text{fun } x \rightarrow 3)$ n'est pas typable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de type τ tel que $\vdash (\text{fun } g \rightarrow g 1 2) (\text{fun } x \rightarrow 3) : \tau$ soit prouvable.

On ajoute maintenant les tuples :

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (e_1, e_2) : \tau_1 * \tau_2}$$

On veut aussi ajouter des fonctions polymorphes.

4. En utilisant des quantificateurs, proposer des types pour **fst** et **snd**, et une règle d'élimination.
5. Montrer alors que **fst** (42, **true**) est bien typé.

II Exercice CCP

Rappelons les règles de déduction naturelle, où A et B sont des formules logiques et Γ un ensemble de formules logiques quelconques :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{AX} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e \quad \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

1. Montrer que le séquent $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.
2. Montrer que le séquent $\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$ est dérivable, en explicitant un arbre de preuve.
3. Donner une règle correspondant à l'introduction du symbole $\wedge$ ainsi que deux règles correspondant à l'élimination du symbole $\wedge$. Montrer que le séquent $\vdash (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \wedge ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A)$ est dérivable.
4. On considère la loi de Peirce $P = ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. Montrer que $\models P$, c'est-à-dire que P est une tautologie.
5. Pour montrer que le séquent $\vdash P$ est dérivable, il est nécessaire d'utiliser la règle d'absurdité classique $\perp_c$ (ou une règle équivalente), ce que l'on fait ci-dessous (il n'y aura pas besoin de réutiliser cette règle). Terminer la dérivation du séquent $\vdash P$, dans laquelle on pose $\Gamma = \{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A\}$:

$$\frac{\frac{\frac{?}{\Gamma \vdash A} \quad ? \quad \frac{}{\Gamma \vdash \neg A} \text{AX}}{\Gamma = (A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash \perp} \neg_i}{\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A}{\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow_i} \perp_c$$

III Lois de De Morgan

1. Prouver le séquent $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.
2. Prouver le séquent $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.
3. Prouver le séquent $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$.
4. En utilisant le tiers exclu de la logique classique $\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ ^{te}, prouver le séquent $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$.

IV Complétude de la logique classique

On souhaite montrer dans cet exercice que la logique classique est complète. Soit $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des variables propositionnelles. Pour A une formule et v une valuation, on définit :

$$|A|_v = \begin{cases} A & \text{si } v(A) = 1 \\ \neg A & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit A une formule et v une valuation. On note $\Gamma = \{|x_1|_v, |x_2|_v, \dots, |x_n|_v\}$. Montrer par induction sur la structure de A que $\Gamma \vdash |A|_v$.
2. Soit x une variable et Γ un contexte quelconque. Montrer que, si $\Gamma, x \vdash A$ et $\Gamma, \neg x \vdash A$, alors $\Gamma \vdash A$.
3. En déduire que si A est une tautologie alors $\Gamma \vdash A$.
4. En déduire la complétude de la logique classique : si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$.

V Quantificateurs

Montrer les séquents suivants :

1. $\vdash \forall x A \rightarrow \exists x A$.
2. $\exists x \neg A \vdash \neg(\forall x A)$.
3. $\forall x (A \wedge B) \vdash (\forall x A) \wedge B$