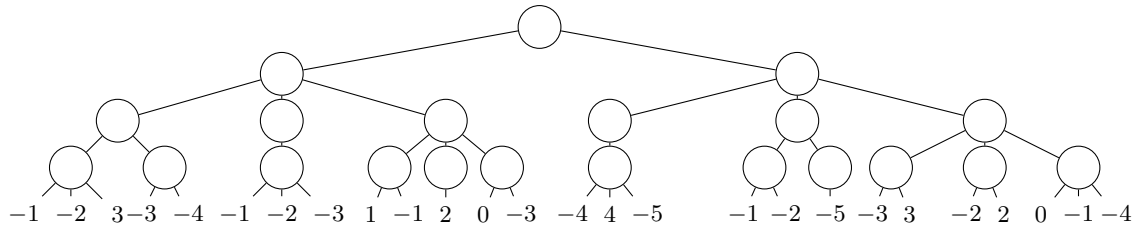


## I Min-max



1. En supposant que le joueur 0 commence et souhaite maximiser l'heuristique, déterminer son évaluation par l'algorithme min-max.
2. Identifier les branches qui n'auraient pas été explorées avec un élagage  $\alpha - \beta$ , en supposant que les enfants sont explorés de gauche à droite.

## II Jeu et couplage

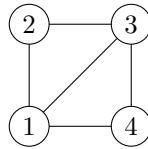
On considère un jeu sur un graphe  $G$  non-orienté où chaque joueur (0 et 1, en commençant par 0) doit choisir un sommet non encore choisi et adjacent au sommet choisi par l'autre joueur. Autrement dit, la suite des sommets choisis doit former un chemin élémentaire dans  $G$ . Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

1. Montrer que si  $G$  admet un couplage parfait alors le joueur 1 a une stratégie gagnante.
2. En considérant un couplage de cardinal maximum, montrer que si  $G$  n'admet pas de couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante.

## III Jeu de Shannon

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux arbres couvrants de  $G$ , on dit qu'ils sont disjoints s'ils n'ont aucune arête en commun.

1. Le graphe suivant possède-t-il deux arbres couvrants disjoints ?



2. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres couvrants de  $G$  et  $e_1$  une arête de  $T_1$ . Montrer qu'il existe une arête  $e_2$  de  $T_2$  telle que  $T_1 - e_1 + e_2$  (le graphe obtenu à partir de  $T_1$  en enlevant  $e_1$  et en ajoutant  $e_2$ ) soit un arbre couvrant de  $G$ .
3. Soit  $T$  un arbre couvrant de  $G$  et  $e$  une arête de  $T$ . Soient  $T'$  et  $G'$  obtenus en contractant  $e$  dans  $T$  et  $G$ , c'est-à-dire en supprimant  $e$  et identifiant ses extrémités. Montrer que  $T'$  est un arbre couvrant de  $G'$ .

Si  $P$  est une partition de  $V$ , on note  $|P|$  son cardinal et  $\|P\|$  le nombre d'arêtes de  $G$  dont les deux extrémités sont dans des ensembles différents de  $P$ . On s'intéresse maintenant au théorème suivant :

### Théorème : Tutte

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $G$  possède  $k$  arbres couvrants disjoints si et seulement si, pour toute partition  $P$  de  $V$ ,  $\|P\| \geq k(|P| - 1)$ .

4. En admettant le théorème de Tutte, montrer que le problème suivant appartient à NP.

### co-PACKING-TREES

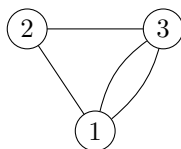
**Entrée :** Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $k$ .

**Question :** Est-il faux que  $G$  possède  $k$  arbres couvrants disjoints ?

5. Montrer le théorème de Tutte pour  $k = 1$ .
6. Montrer le sens direct du théorème de Tutte : si  $G$  possède  $k$  arbres couvrants disjoints, alors  $\|P\| \geq k(|P| - 1)$ .

On considère un jeu avec un graphe  $G = (V, E)$  non orienté qui peut posséder plusieurs arêtes entre deux sommets. Deux joueurs  $A$  et  $B$ , où  $A$  commence, choisissent alternativement une arête de  $G$  non encore choisie. Si, à un moment de la partie, les arêtes choisies par  $B$  forment un arbre couvrant de  $G$  alors  $B$  gagne. Sinon,  $A$  gagne.

7. Indiquer si  $B$  a une stratégie gagnante si  $G$  est le graphe ci-dessous.



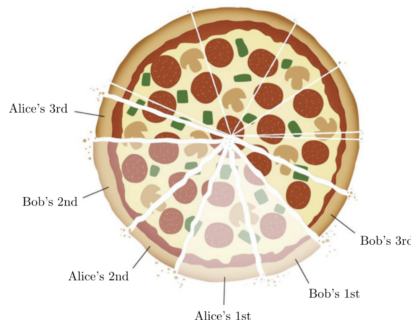
Dans la suite, on veut montrer que  $B$  possède une stratégie gagnante si et seulement si  $G$  possède deux arbres couvrants disjoints. Pour cela, on admet le théorème de Tutte.

8. Supposons qu'il existe une partition  $P$  de  $V$  telle que  $\|P\| < 2(|P| - 1)$ . Montrer que  $A$  a une stratégie gagnante.
9. Supposons qu'il existe deux arbres couvrants disjoints  $T_1$  et  $T_2$  dans  $G$ . Montrer que  $B$  a une stratégie gagnante. On pourra raisonner par récurrence sur  $|V|$ .

## IV Pizza

Alice et Bob se partagent une pizza, qui est découpée en  $n$  parts. Chaque part possède un poids. Ils choisissent une part chacun leur tour, avec les règles suivantes :

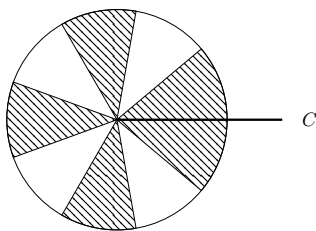
- Alice commence et choisit la part de son choix.
- Ensuite, ils alternent en choisissant à chaque fois une part adjacente à une part déjà choisie (de façon à ce que les parts mangées soient contigües).



L'objectif pour chaque joueur est de manger un poids de pizza le plus important possible.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles pour ce jeu ?
2. Donner une stratégie gloutonne pour Alice et montrer qu'elle n'est pas optimale.
3. On suppose  $n$  pair. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante (permettant de manger au moins la moitié de la pizza).

Dans la suite, on suppose que  $n$  est impair. Une coupe désigne la zone entre deux parts de pizza adjacentes. Pour chaque coupe  $C$ , on sépare les parts en deux ensembles  $R(C)$  (hachuré) et  $G(C)$  (en blanc) comme sur l'exemple suivant :



4. Montrer que Alice a une stratégie lui garantissant de manger toutes les parts de  $R(C)$ , pour une certaine coupe  $C$  (quelconque).
5. En déduire qu'Alice a une stratégie lui garantissant de manger au moins  $\frac{1}{3}$  de la pizza.