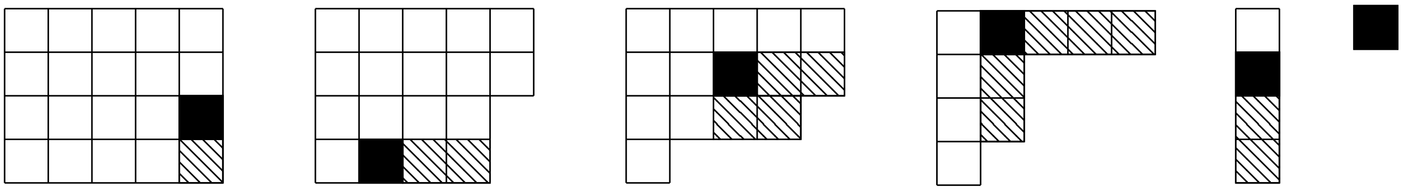
I Jeu de Chomp

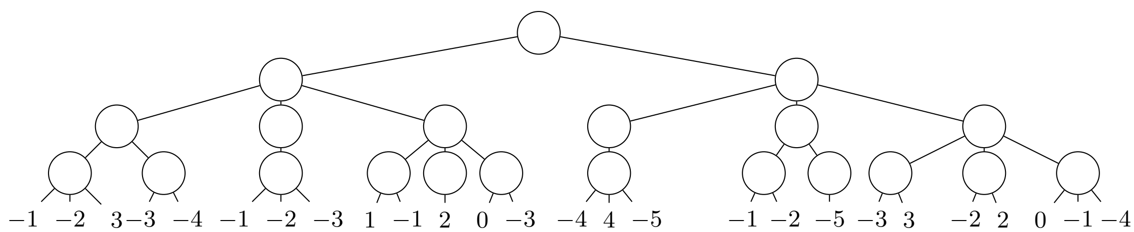
Le jeu de Chomp se joue à deux joueurs (Alice et Bob, où Alice commence) sur une tablette de chocolat. Tour à tour, chaque joueur choisit un carré restant de la tablette et le mange ainsi que tous les carrés à droite et en bas de celui-ci. Le joueur qui mange le carré en haut à gauche a perdu. Voici un exemple de partie, où le carré choisi à chaque tour est en noir et les (autres) cases mangées hachurées :



On représente la tablette de chocolat par une matrice, où un 1 indique que la case est mangée et un 0 qu'elle n'est pas mangée. La case en haut à gauche de la tablette de chocolat a pour coordonnées $(0, 0)$ dans cette matrice.

1. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante, pour une tablette initiale rectangulaire contenant au moins deux carrés de chocolat.
2. Dessiner le graphe des configurations pour une tablette initiale de taille 2×2, c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont les configurations possibles de la tablette et dont les arêtes sont les coups possibles. On indiquera sur chaque sommet si c'est Alice ou Bob qui doit jouer.
3. Déterminer, à la main, les attracteurs pour Alice sur une tablette initiale de taille 2×2. On pourra les indiquer sur le graphe précédent.

II Min-max



1. En supposant que le joueur 0 commence et souhaite maximiser l'heuristique, déterminer son évaluation par l'algorithme min-max.
2. Identifier les branches qui n'auraient pas été explorées avec un élagage α - β dans le premier cas (en supposant que les enfants sont explorés de gauche à droite).

III Jeu et couplage

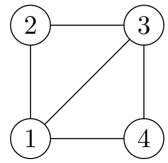
On considère un jeu sur un graphe G non-orienté où chaque joueur (0 et 1, en commençant par 0) doit choisir un sommet non encore choisi et adjacent au sommet choisi par l'autre joueur. Autrement dit, la suite des sommets choisis doit formet un chemin élémentaire dans G. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

1. Montrer que si G admet un couplage parfait alors le joueur 1 a une stratégie gagnante.
2. En considérant un couplage de cardinal maximum, montrer que si G n'admet pas de couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante.

IV Jeu de Shannon

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si T_1 et T_2 sont deux arbres couvrants de G, on dit qu'ils sont disjoints s'ils n'ont aucune arête en commun.

1. Le graphe suivant possède t-il deux arbres couvrants disjoints ?



2. Soient T_1 et T_2 deux arbres couvrants de G et e_1 une arête de T_1. Montrer qu'il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ (le graphe obtenu à partir de T_1 en enlevant e_1 et en ajoutant e_2) soit un arbre couvrant de G.
3. Soit T un arbre couvrant de G et e une arête de T. Soient T' et G' obtenus en contractant e dans T et G, c'est-à-dire en supprimant e et identifiant ses extrémités. Montrer que T' est un arbre couvrant de G'.

Si P est une partition de V, on note $|P|$ son cardinal et $\|P\|$ le nombre d'arêtes de G dont les deux extrémités sont dans des ensembles différents de P.

On s'intéresse maintenant au théorème suivant :

Théorème : Théorème de Tutte

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. G possède k arbres couvrants disjoints si et seulement si, pour toute partition P de V, $\|P\| \geq k(|P| - 1)$.

4. En admettant le théorème de Tutte, montrer que le problème suivant appartient à NP.

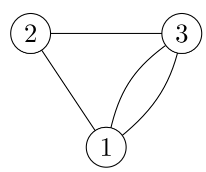
   co-PACKING-TREES

   Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
   Question : Est-il faux que G possède k arbres couvrants disjoints ?

5. Montrer le théorème de Tutte pour $k = 1$.
6. Montrer le sens direct du théorème de Tutte : si G possède k arbres couvrants disjoints, alors $\|P\| \geq k(|P| - 1)$.

On considère un jeu avec un graphe $G = (V, E)$ non orienté qui peut posséder plusieurs arêtes entre deux sommets.
Deux joueurs A et B, où A commence, choisissent alternativement une arête de G non encore choisie. Si, à un moment de la partie, les arêtes choisies par B forment un arbre couvrant de G alors B gagne. Sinon, A gagne.

7. Indiquer si B a une stratégie gagnante si G est le graphe ci-dessous.



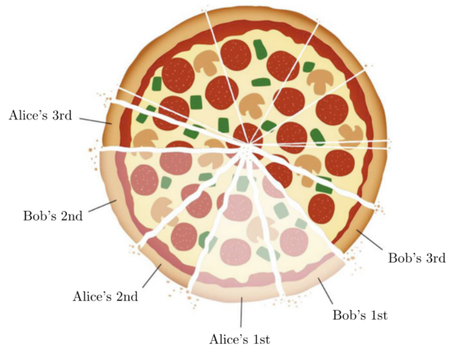
Dans la suite, on veut montrer que B possède une stratégie gagnante si et seulement si G possède deux arbres couvrants disjoints. Pour cela, on admet le théorème de Tutte.

8. Supposons qu'il existe une partition P de V telle que $\|P\| < 2(|P| - 1)$. Montrer que A a une stratégie gagnante.
9. Supposons qu'il existe deux arbres couvrants disjoints T_1 et T_2 dans G. Montrer que B a une stratégie gagnante.
   On pourra raisonner par récurrence sur $|V|$.

V Pizza

Alice et Bob se partagent une pizza, qui est découpée en n parts. Chaque part possède un poids. Ils choisissent une part chacun leur tour, avec les règles suivantes :

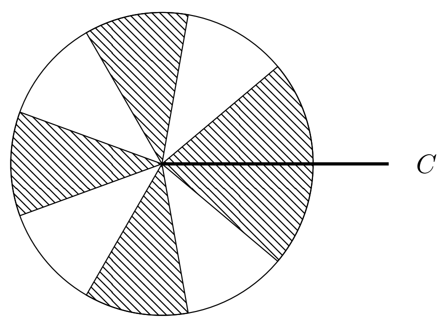
- Alice commence et choisit la part de son choix.
- Ensuite, ils alternent en choisissant à chaque fois une part adjacente à une part déjà choisie (de façon à ce que les parts mangées soient contigües).



L'objectif pour chaque joueur est de manger un poids de pizza le plus important possible.

1. Combien y a t-il de configurations possibles pour ce jeu ?
2. Donner une stratégie gloutonne pour Alice et montrer qu'elle n'est pas optimale.
3. On suppose que n est pair. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante (lui garantissant de manger au moins la moitié de la pizza).

Dans la suite, on suppose que n est impair.
Une coupe désigne la zone entre deux parts de pizza adjacente. Pour chaque coupe C, on sépare les parts en deux ensembles $R(C)$ (hachuré) et $G(C)$ (en blanc) comme sur l'exemple suivant :



4. Montrer que Alice a une stratégie lui garantissant de manger toutes les parts de $R(C)$, pour une certain coupe C (quelconque).
5. En déduire qu'Alice a une stratégie lui garantissant de manger au moins $\dfrac{1}{3}$ de la pizza.